

ISSN 1609-0586

**BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏVƏRLƏRİ**

**ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**NEWS
OF BAKU UNIVERSITY**

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 3, 2022

Bakı – 2022

RİYAZİYYAT

УДК 517.977.56 62-50

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ^{1,2}Ж.Б.АХМЕДОВА, ^{1,2}К.Б.МАНСИМОВ¹Бакинский Государственный Университет²Институт Систем Управления НАН Азербайджана

akja@rambler.ru

kamilbmansimov@gmail.com

Рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая на различных отрезках времени различными дифференциальными уравнениями, а функционал качества является многоточечным. Доказаны аналоги принципа максимума Л.С.Понтрягина, линеаризованного условия максимума и аналог уравнения Эйлера.

Ключевые слова: система с переменной структурой, обыкновенное дифференциальное уравнение, принцип максимума Понтрягина, линеаризованное условие максимума, уравнение Эйлера, допустимое управление, необходимое условие оптимальности.

1. Введение

В работах [1-5] изучены различные задачи оптимального управления с переменной структурой (такие задачи управления называют также ступенчатыми задачами оптимального управления [3-5]), описываемые на различных отрезках времени различными дифференциальными уравнениями.

В предлагаемой работе рассматривается также задача оптимального управления с переменной структурой, но с более общим (многоточечным) функционалом качества.

Доказаны ряд необходимых условий оптимальности при различных предположениях на параметры рассматриваемой задачи.

2. Постановка задачи и формула приращения функционала качества

Пусть $T_i = [t_{i-1}, t_i], i = 1, 2$ – заданные отрезки, $(t_0 < t_1 < t_2)$, $\theta_i \in (t_0, t_1], \xi_i \in (t_1, t_2], (t_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k \leq t_1; t_1 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k \leq t_2)$ – заданные точки, $U_1 \subset R^r$ и $U_2 \subset R^q$ – заданные непустые и ограниченные множества, $\varphi_1(a_1, \dots, a_k), \varphi_2(b_1, \dots, b_k)$ – заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Предположим, что управляемый, двухэтапный процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), u_1(t)), t \in T_1 = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(t, x_2(t), u_2(t)), t \in T_2 = [t_1, t_2], \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad (3)$$

$$x_2(t_1) = g(x_1(t_1)). \quad (4)$$

Здесь $f_i(t, x_i, u_i), i = 1, 2$ – заданные непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $x_i, i = 1, 2$, n -мерные вектор-функции, $g(x_1)$ – заданная непрерывно дифференцируемая n -мерная вектор-функция, x_{10} – заданный постоянный вектор, $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – кусочно непрерывные (с конечным числом точек разрыва первого рода) r и r -мерные соответственно, вектор-функции управляющих воздействий со значениями из множеств U_1 и U_2 соответственно, т.е.

$$u_1(t) \in U_1, t \in T_1 \quad (5)$$

$$u_2(t) \in U_2, t \in T_2. \quad (6)$$

Каждую пару $(u_1(t), u_2(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(u_1(t), u_2(t))$ соответствует единственное кусочно-гладкое решение $(x_1(t), x_2(t))$ задачи (1)-(4).

Рассмотрим задачу о нахождении минимального значения многоточечного функционала

$$J(u_1, u_2) = \varphi_1(x_1(\theta_1), \dots, x_1(\theta_k)) + \varphi_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k)) \quad (7)$$

при ограничениях (1)-(6).

Допустимое управление $(u_1(t), u_2(t))$, доставляющее минимальное значение функционалу (7) при ограничениях (1)-(6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ – оптимальным процессом.

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче.

Пусть $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ и $(\bar{u}_1(t) = u_1(t) + \Delta u_1(t), \bar{u}_2(t) = u_2(t) + \Delta u_2(t), \bar{x}_1(t) = x_1(t) + \Delta x_1(t), \bar{x}_2(t) = x_2(t) + \Delta x_2(t))$ некоторые допустимые процессы.

Тогда, ясно, что приращение $(\Delta x_1(t), \Delta x_2(t))$ траектории

$(x_1(t), x_2(t))$ будет решением задачи

$$\Delta \dot{x}_1(t) = f_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - f_1(t, x_1(t), u_1(t)), \quad (8)$$

$$\Delta x_1(t_0) = 0, \quad (9)$$

$$\Delta \dot{x}_2(t) = f_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - f_2(t, x_2(t), u_2(t)), \quad (10)$$

$$\Delta x_2(t_1) = g(\bar{x}_1(t_1)) - g(x_1(t_1)). \quad (11)$$

Пусть $\psi_i(t), i = 1, 2$ некоторые n -мерные вектор-функции.

Введем аналоги функции Гамильтона-Понтрягина в виде

$$H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t)) = \psi_i'(t) f_i(t, x_i(t), u_i(t)), i = 1, 2.$$

Из тождеств (8) и (10) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \psi_1'(t) \Delta \dot{x}_1(t) dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} [H_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t), \psi_1(t)) - H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))] dt, \\ & \int_{t_1}^{t_2} \psi_2'(t) \Delta \dot{x}_2(t) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} [H_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t), \psi_2(t)) - H_1(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))] dt. \end{aligned}$$

Тогда приращение функционала качества (7) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) &= \varphi_1(\bar{x}_1(\theta_1), \dots, \bar{x}_1(\theta_k)) - \varphi_1(x_1(\theta_1), \dots, x_1(\theta_k)) + \\ &+ \varphi_2(\bar{x}_2(\xi_1), \dots, \bar{x}_2(\xi_k)) - \varphi_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k)) + \int_{t_0}^{t_1} \psi_1'(t) \Delta \dot{x}_1(t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} [H_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t), \psi_1(t)) - H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))] dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \psi_2'(t) \Delta \dot{x}_2(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} [H_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t), \psi_2(t)) - \\ &- H_1(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))] dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{u}_i} H_i[t, \psi_i] &\equiv H_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t)) - H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t)), i = 1, 2, \\ \frac{\partial H_i[t, \psi_i]}{\partial x_i} &\equiv \frac{\partial H_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} - \frac{\partial H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i}, i = 1, 2 \end{aligned}$$

и предположим, что вектор-функции $\psi_i(t), i = 1, 2$ являются решениями следующих линейных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = & \int_t^{t_1} \frac{\partial H_1[\tau, \psi_1]}{\partial x_1} d\tau - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi_1(x_1(\theta_1), \dots, x_1(\theta_k))}{\partial a_i} - \\ & - \sum_{i=1}^k \frac{\partial g'(x_1(t_1))}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial g'(x_1(t_1))}{\partial x_1} \frac{\partial H_2[\tau, \psi_2]}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\psi_2(t) = \int_t^{t_2} \frac{\partial H_2[\tau, \psi_2]}{\partial x_2} d\tau - \sum_{i=1}^k \beta_i(t) \frac{\partial \varphi_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i}. \quad (14)$$

Здесь $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ характеристические функции отрезков $[t_0, \theta_i]$, $[t_1, \xi_i]$, соответственно.

Тогда приращение (12) функционала качества (7) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}_1} H_1[t, \psi_1] dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{u}_2} H_2[t, \psi_2] dt + \\ & + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_1(\theta_i)\| \right) + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_2(\xi_i)\| \right) - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x_1(t)\|) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta x_2(t)\|) dt + \\ & + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_2'(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|) - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \frac{H_2'[t, \psi_2]}{\partial x_2} o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|) dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\Delta_{\bar{u}_1} H_1[t, \psi_1]}{\partial x_2} \Delta x_1(t) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\Delta_{\bar{u}_2} H_2[t, \psi_2]}{\partial x_2} \Delta x_2(t) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ есть величина более высокого порядка чем α , т. е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Доказательство формулы (15) дано в приложении.

3. Необходимые условия оптимальности

Из формулы приращения (15) следует, что при $\Delta u_2(t) = 0$

$$\begin{aligned}
J(\bar{u}_1, u_2) - J(u_1, u_2) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}_1} H_1[t, \psi_1] dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H_1[t, \psi_1]}{\partial x_1} \Delta x_1(t) dt + \\
& + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_1(\theta_i)\| \right) + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_2(\xi_i)\| \right) - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x_1(t)\|) dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta x_2(t)\|) dt + \\
& + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_2'(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|) - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \frac{H_2'[t, \psi_2]}{\partial x_2} o_5(\|\Delta x_2(t_1)\|) dt, \tag{16}
\end{aligned}$$

а из формул (8)-(11) следует, что

$$\Delta \dot{x}_1(t) = f_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - f_1(t, x_1(t), u_1(t)), \tag{17}$$

$$\Delta x_1(t_1) = 0, \tag{18}$$

$$\Delta \dot{x}_2(t) = f_2(t, \bar{x}_2(t), u_2(t)) - f_2(t, x_2(t), u_2(t)), \tag{19}$$

$$\Delta x_2(t_1) = g(\bar{x}_1(t_1)) - g(x_1(t_1)). \tag{20}$$

При $\Delta u_1(t) = 0, \Delta u_2(t) \neq 0$ получаем, что

$$\begin{aligned}
J(u_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) = & - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{u}_2} H_2[t, \psi_2] dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_2} H_2[t, \psi_2]}{\partial x_2} \Delta x_2(t) dt + \\
& + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_2(\xi_i)\| \right) - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta x_2(t)\|) dt. \tag{21}
\end{aligned}$$

При этом, $\Delta x_1(t) = 0$, а $\Delta x_2(t)$ является решением задачи

$$\Delta \dot{x}_2(t) = f_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - f_2(t, x_2(t), u_2(t)), \tag{22}$$

$$\Delta x_2(t_1) = 0. \tag{23}$$

Из соотношений (17)-(20) следует, что

$$\Delta x_1(t) = \int_{t_0}^t \left(f_1(\tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau)) \right) d\tau, \tag{24}$$

$$\Delta x_2(t) = \Delta x_2(t_1) + \int_{t_1}^t \left(f_2(\tau, \bar{x}_2(\tau), u_2(\tau)) - f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) \right) d\tau. \tag{25}$$

Из (24) переходя к норме, и используя лемму Гронуолла-Беллмана, получаем справедливость (см. например, [6]) оценки

$$\|\Delta x_1(t)\| \leq L_1 \int_{t_0}^t \|\Delta_{\bar{u}_1} f_1[\tau]\| d\tau, \tag{26}$$

где $L_1 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

А из (3.25) получаем, что

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_2 \left[\|\Delta x_1(t_1)\| + \int_{t_1}^t \|\Delta x_2[\tau]\| d\tau \right], \quad (27)$$

где $L_2 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла-Беллмана, и учитывая оценку (26) приходим к оценке

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_3 \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta_{\bar{u}_1} f_1[\tau]\| d\tau, \quad (28)$$

где $L_3 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

По аналогии с оценкой (26) из (22) следует справедливость оценки

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_4 \int_{t_1}^t \|\Delta_{\bar{u}_2} f_2[\tau]\| d\tau, \quad (29)$$

где $L_4 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

Пусть $\theta \in [t_0, t_1)$ произвольная точка непрерывности управляющей функции $u_1(t)$, $v_1 \in U_1$ – произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Специальное приращение управляющей функции $u_1(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_1(t; \varepsilon) = \begin{cases} v_1 - u_1(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T_1 \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \quad (30)$$

Пусть $(\Delta x_1(t; \varepsilon), \Delta x_2(t; \varepsilon))$ – специальное приращение траектории, отвечающее специальному приращению (30) управляющей функции $u_1(t)$. Тогда из оценок (26), (28) следует, что

$$\begin{aligned} \|\Delta x_1(t; \varepsilon)\| &\leq L_5 \varepsilon, t \in T_1, \\ \|\Delta x_2(t; \varepsilon)\| &\leq L_6 \varepsilon, t \in T_2, \end{aligned} \quad (31)$$

где $L_5, L_6 = \text{const}$ некоторые положительные постоянные.

Принимая во внимание формулу (30) и оценки (31), из формулы приращения (16) получаем, что

$$\begin{aligned} J(u_1(t) + \Delta u_1(t; \varepsilon), u_2(t)) - J(u_1(t), u_2(t)) &= \\ &= -\varepsilon \Delta_{v_1} H_1[\theta, \psi_1] + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь специальное приращение управляющей функции $u_2(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t; \mu) = \begin{cases} v_2 - u_2(t), & t \in [\xi, \xi + \mu), \\ 0, & t \in T_2 \setminus [\xi, \xi + \mu). \end{cases} \quad (33)$$

Здесь $v_2 \in U_2$ – произвольный вектор, $\xi \in [t_1, t_2)$ произвольная точка непрерывности управляющей функции $u_2(t)$, а $\mu > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\xi + \mu < t_2$.

Ясно, что в этом случае специальное приращение траектории

$x_1(t)$ равно нулю, а для $\Delta x_2(t; \mu)$, т.е. для специального приращения траектории $x_2(t)$, отвечающее приращению (33), в силу (29), имеет место оценка

$$\|\Delta x_2(t; \mu)\| \leq L_7 \varepsilon, t \in T_2, \quad (34)$$

$(L_7 = \text{const} > 0).$

Учитывая формулу (33) и оценку (34), из формулы приращения (21) получаем, что

$$\begin{aligned} J(u_1(t), u_2(t) + \Delta u_2(t; \mu)) - J(u_1(t), u_2(t)) = \\ = -\mu \Delta_{v_2} H_2[\xi, \psi_2] + o(\mu). \end{aligned} \quad (35)$$

Из разложений (27), (35) следует

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\begin{aligned} \max_{v_1 \in U_1} H_1(\theta, x_1(\theta), v_1, \psi_1(\theta)) &= H_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta)), \\ \max_{v_2 \in U_2} H_2(\xi, x_2(\xi), v_2, \psi_2(\xi)) &= H_2(\xi, x_2(\xi), u_2(\xi), \psi_2(\xi)) \end{aligned}$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $\xi \in [t_1, t_2]$ соответственно.

Теперь предположим, что множества $U_i, i = 1, 2$ выпуклы, а $f_i(t, x_i, u_i), i = 1, 2$ имеют непрерывные производные также по $u_i, i = 1, 2$.

Тогда с рассуждениями, аналогичными рассуждениям из приложения, по аналогии с доказательством формулы приращения (16) доказывается, что

$$\begin{aligned} J(\bar{u}_1, u_2) - J(u_1, u_2) &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H_1'[t, \psi_1]}{\partial u_1} \Delta u_1(t) dt + \\ &+ o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_1(\theta_i)\| \right) + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_2(\xi_i)\| \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_2'(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} o_5(\|\Delta x(t_1)\|) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} o_6(\|\Delta x_1(t) + \Delta u_1(t)\|) dt - \int_{t_1}^{t_2} o_7(\|\Delta x_2(t)\|) dt, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} J(u_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'[t, \psi_2]}{\partial u_2} \Delta u_2(t) dt + \\ &+ o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_2(\xi_i)\| \right) - \int_{t_0}^{t_1} o_8(\|\Delta x_2(t) + \Delta u_2(t)\|) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Далее из оценок (26) и (27) получаем, что

$$\|\Delta x_1(t)\| \leq L_8 \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_1(t)\| dt,$$

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_9 \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_1(t)\| dt, \quad (38)$$

где $L_i = \text{const} > 0, i = 8, 9$ некоторые постоянные.

А из оценки (29) получаем, что

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_{10} \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u_2(t)\| dt. \quad (39)$$

(где $L_{10} = \text{const} > 0$ некоторая постоянная).

Пусть $v_1(t) \in U_1$ – произвольная допустимая управляющая функция, а $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное число. Тогда специальное приращение управляющей функции $u_1(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_1(t; \varepsilon) = \varepsilon[v_1(t) - u_1(t)], t \in T_1. \quad (40)$$

Через $(\Delta x_1(t; \varepsilon), \Delta x_2(t; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение траектории $(x_1(t), x_2(t))$, отвечающее специальному приращению (40) управляющей функции $u_1(t)$. Тогда учитывая оценки (38) и формулу (36) из частичной формулы приращения (36) получаем, что

$$\begin{aligned} J(u_1(t) + \Delta u_1(t; \varepsilon), u_2(t)) - J(u_1(t), u_2(t)) &= \\ &= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'_1[t, \psi_1]}{\partial u_1} [v_1(t) - u_1(t)] dt + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (41)$$

Если специальное приращение $\Delta u_2(t; \mu)$ допустимой управляющей функции $u_2(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t; \mu) = \mu[v_2(t) - u_2(t)],$$

где $\mu \in [0,1]$ произвольное число, а $v_2(t) \in U_2$ произвольная допустимая управляющая функция, то учитывая также оценку (39) из формулы приращения (37) получаем, что

$$\begin{aligned} J(u_1(t), u_2(t) + \Delta u_2(t; \mu)) - J(u_1(t), u_2(t)) &= \\ &= -\mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2[t, \psi_2]}{\partial u_2} [v_2(t) - u_2(t)] dt + o(\mu). \end{aligned} \quad (42)$$

С помощью разложений (41) и (42) доказывается

Теорема 2. (линеаризованный принцип максимума). Если множества $U_i, i = 1, 2$ открыты, а вектор-функции $f_i(t, x_i, u_i), i = 1, 2$ непрерывно-дифференцируемы по $(x_i, u_i), i = 1, 2$, то для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'_1[t, \psi_1]}{\partial u_1} [v_1(t) - u_1(t)] dt \leq 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'[t, \psi_2]}{\partial u_2} [v_2(t) - u_2(t)] dt \leq 0$$

выполнялись для всех $v_1(t) \in U_1, t \in T_1$ и $v_2(t) \in U_2, t \in T_2$ соответственно.

Используя формулы приращения (36) и (37) в случае открытости областей управления $U_i, i = 1, 2$ доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. (аналог уравнения Эйлера). Если множества $U_i, i = 1, 2$ открыты. Тогда для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\frac{\partial H_1[\theta, \psi_1]}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial H_2[\xi, \psi_2]}{\partial u_2} = 0,$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $\xi \in [t_1, t_2]$ соответственно.

4. Заключение

Установленные необходимые условия оптимальности, являясь условиями оптимальности первого порядка, носят конструктивный характер. Они могут быть использованы для численного решения соответствующих двухэтапных задач оптимального управления, а также при исследовании конкретных прикладных задач.

5. Приложение

Доказательство формулы (15).

Применяя формулу Тейлора и используя введенные обозначения, из (12) получим, что

$$\begin{aligned} J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_1'(x_1(\theta_i), \dots, x_1(\theta_k))}{\partial a_i} \Delta x_1(\theta_i) + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_1(\theta_i)\| \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_2'(x_2(\xi_i), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} \Delta x_2(\xi_i) + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_2(\xi_i)\| \right) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \psi_1'(t) \Delta \dot{x}_1(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}_1} H_1[t, \psi_1] dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H_1'[t, \psi_1]}{\partial x_1} \Delta x_1(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H_1'[t, \psi_1]}{\partial x_2} \Delta x_1(t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x_1(t)\|) dt + \int_{t_1}^{t_2} \psi_2'(t) \Delta \dot{x}_2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{u}_2} H_2[t, \psi_2] dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'[t, \psi_2]}{\partial x_2} \Delta x_2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_2} H_2'[t, \psi_2]}{\partial x_2} \Delta x_2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta x_2(t)\|) dt. \quad (n. 1) \end{aligned}$$

Из начальных условий (3) и (4) ясно, что

$$\Delta x_1(t) = \int_{t_0}^t \Delta \dot{x}_1(\tau) d\tau, \quad (n.2)$$

$$\Delta x_2(t) = \Delta x_2(t_1) + \int_{t_1}^t \Delta \dot{x}_2(\tau) d\tau = g(\bar{x}_1(t_1)) - g(x_1(t_1)) + \int_{t_1}^t \Delta \dot{x}_2(\tau) d\tau. \quad (n.3)$$

Пусть $\alpha_i(t)$ характеристическая функция отрезка $[t_0, \theta_i]$, а $\beta_i(t)$ есть характеристическая функция отрезка $[t_1, \xi_i]$, $i = \overline{1, k}$.

Тогда из представлений (п.2) и (п.3) получаем, что

$$\Delta x_1(\theta_i) = \int_{t_0}^{t_1} \alpha_i(t) \Delta \dot{x}_1(t) dt, \quad (n.4)$$

$$\Delta x_2(\xi_i) = g(\bar{x}_1(t_1)) - g(x_1(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \beta_i(t) \Delta \dot{x}_2(t) dt. \quad (n.5)$$

Поэтому справедливы соотношения:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_1(x_1(\theta_1), \dots, x_1(\theta_k))}{\partial a_i} \Delta x_1(\theta_i) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi'_1(x_1(\theta_1), \dots, x_1(\theta_k))}{\partial a_i} \Delta \dot{x}_1(t) dt, \quad (n.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} \Delta x_2(\xi_i) &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^k \beta_i(t) \frac{\partial \varphi'_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} \Delta \dot{x}_2(t) dt + \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} [g(\bar{x}_1(t_1)) - g(x_1(t_1))] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^k \beta_i(t) \frac{\partial \varphi'_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} \Delta \dot{x}_2(t) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} \frac{\partial g(x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta \dot{x}_1(t) dt + \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|), \end{aligned} \quad (n.7)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'_1[t, \psi_1]}{\partial x_1} \Delta x_1(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} \frac{\partial H'_1[\tau, \psi_1]}{\partial x_1} d\tau \right] \Delta \dot{x}_1(t) dt, \quad (n.8)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2[t, \psi_2]}{\partial x_2} \Delta x_2(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_t^{t_2} \frac{\partial H'_2[\tau, \psi_2]}{\partial x_2} d\tau \right] \Delta \dot{x}_2(t) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2[\tau, \psi_2]}{\partial x_2} \frac{\partial g(x_1(t_1))}{\partial x_1} d\tau \right] \Delta \dot{x}_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2[t, \psi_2]}{\partial x_2} o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|) dt. \end{aligned} \quad (n.9)$$

Учитывая тождества (п.6)-(п.9) в формуле приращения (п.1) получим, что

$$\begin{aligned}
J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) = & \int_{t_0}^{t_1} \psi'_1(t) \Delta \dot{x}_1(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}_1} H_1[t, \psi_1] dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} \frac{\partial H'_1[\tau, \psi_1]}{\partial x_1} d\tau \right] \Delta \dot{x}_1(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi'_1(x_1(\theta_1), \dots, x_1(\theta_k))}{\partial a_i} \Delta \dot{x}_1(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2[\tau, \psi_2]}{\partial x_2} \frac{\partial g(x_1(t_1))}{\partial x_1} d\tau \right] \Delta \dot{x}_1(t) dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} \frac{\partial g(x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta \dot{x}_1(t) dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^k \beta_i(t) \frac{\partial \varphi'_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} \Delta \dot{x}_2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \psi'_2(t) \Delta \dot{x}_2(t) dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_t^{t_2} \frac{\partial H'_2[\tau, \psi_2]}{\partial x_2} d\tau \right] \Delta \dot{x}_2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{u}_2} H_2[t, \psi_2] dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H_1[t, \psi_1]}{\partial x_2} \Delta x_1(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_2} H_2[t, \psi_2]}{\partial x_2} \Delta x_2(t) dt + \\
& + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_1(\theta_i)\| \right) + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta x_2(\xi_i)\| \right) - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x_1(t)\|) dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta x_2(t)\|) dt + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(x_2(\xi_1), \dots, x_2(\xi_k))}{\partial b_i} o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|) - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial H'_2[t, \psi_2]}{\partial x_2} o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|) \right] dt. \quad (n.10)
\end{aligned}$$

Теперь, если предполагать, что $\psi_i(t), i = 1, 2$ являются решениями интегральных уравнений (13) и (14), то получим формулу приращения (15) функционала качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсенашвили А.И., Тадумадзе Т.А. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с переменной структурой // Труды ИПМ им. И.Н.Векуа Тбилисского гос. университета. - Тбилиси, - 1988. - т. 27. - с. 35-48.
2. Никольский М.С. Вариационные задачи с переменной структурой // Вестник МГУ, Сер. Выч. Мат. и киберн. - 1987, - №1, - с. 36-41.
3. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом // Вестник РУДН, Сер. прикл. матем. и компьютерная мате-

- матика. - 2002. - № 1(1). - с. 131-136.
4. Исмаилов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. Выч. мат. и мат. физики. - 2006. - №10. - с. 1758-1770.
 5. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. - 1993. - № 6. - с. 32-36.
 6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. - Минск: Четыре четверти, - 2011, - 472 с.

BİR DƏYİŞƏN STUKTURLU OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

J.B.ƏHMƏDOVA, K.B.MƏNSİMOV

XÜLASƏ

Keyfiyyət meyarı çoxnöqtəli funksional olan və müxtəlif zaman parçalarında müxtəlif diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır.

Pontryaginın maksimum prinsipinin, xəttləşdirilmiş maksimum şərtinin analoqları və Eyer tənliyinin analoqu isbat edilmişdir.

Açar sözlər: dəyişən strukturlu sistem, adi diferensial tənlik, Pontryaginın maksimum prinsipi, xəttləşdirilmiş maksimum şərti, Eyer tənliyi, mümkün idarə, optimallıq üçün zəruri şərt.

ON ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A VARIABLE STRUCTURE

Zh.B.AHMADOVA, K.B.MANSIMOV

SUMMARY

One optimal control problem is considered, described at different time intervals by various differential equations, and the quality functional is multipoint. Analogues of the principle of the maximum of L.S. Pontryagin, the linearized condition of the maximum and the analogue of the Euler equation are proved

Keywords: system with variable structure, ordinary differential equation, Pontryagin's maximum principle, linearized maximum condition, Euler equation, admissible control, necessary condition of optimality.

УДК 517.954

**INVESTIGATION OF FREDHOLM PROPERTY
OF A THIRD ORDER THREE-DIMENSIONAL
COMPOSITE EQUATION BY NEW METHOD****Y.Y.MUSTAFAYEVA, N.A.ALIYEV***Baku State University**yelenamustafayeva@bsu.edu.az*

The paper is devoted to investigation of Fredholm property of a three-dimensional third order composite equation with nonlocal boundary value conditions by a new approach including construction of a fundamental solution, finding basic relationships and regularization of the obtained necessary conditions.

Keywords: three-dimensional, third-order composite equation, fundamental solution, basic relationships, necessary conditions, regularization, Fredholm property.

Introduction

As is known, for an ordinary differential equation the number of additional conditions (Cauchy conditions or boundary conditions) always coincides with the order of the equation in question [1].

The non-local boundary conditions free us from the above misunderstanding between ordinary differential equations and partial differential equations. The authors, precisely for nonlocal boundary value problems, found the possibility of proving Fredholm property with the help of the derivation of the so-called necessary conditions and their regularization.

The idea of necessary conditions was first used by A.V. Bitsadze for the Laplace equation [2, p.185]. We are going to obtain the necessary conditions from the basic relationships which are deduced only from the equation under consideration and are analogs of the Lagrange formula for an ordinary differential equations and for partial differential equations they are obtained from the second Green formula. Necessary conditions show to which relationships the required solution and its partial derivatives must satisfy on the boundary of the domain and that we cannot arbitrarily define the desired function and its partial derivatives on the boundary of the domain even in the class of admissible functions (continuous or continuously

differentiable). That is, if the boundary conditions do not satisfy the necessary conditions then the stated boundary value problem has no solution in this class. If the boundary conditions are a linear combination of these necessary conditions then the solution will not be unique and the boundary value problem will have infinitude of solutions.

If the necessary conditions are singular they can be regularized with the help of the very non-local boundary conditions and then used to prove the Fredholm property of the stated boundary value problem by an original scheme [3], [4].

Considering the nonlocal boundary conditions for a partial differential equation we get the opportunity to investigate the solution of boundary value problems for differential equations of both even and odd order.

1. Statement of the problem

We are going to consider a three-dimensional composite equation

$$Lu(x) = \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_3^2 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in D_1,$$

in three-dimensional domain $D \subset R^3$ with Lyapunov boundary Γ and convex in direction x_3 , with nonlocal boundary conditions:

$$l_i u = \sum_{m=1}^2 \left[\alpha_{i,11}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \alpha_{i,22}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \alpha_{i,33}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \right. \\ \left. + \alpha_{i,12}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \alpha_{i,13}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \alpha_{i,23}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} \right] + \\ + \sum_{j=1}^3 \left[\alpha_{ij}^{(1)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_1(x')} + \alpha_{ij}^{(2)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_2(x')} \right] + \\ + \alpha_i^{(1)}(x') u(x', \gamma_1(x')) + \alpha_i^{(2)}(x') u(x', \gamma_2(x')) = f_i(x'), i = \overline{1,3}, \quad (1.2)$$

$$u(x) = f_0(x), \quad x \in L = \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}, \quad (1.3)$$

where domain $S \subset Ox_1x_2$ is the projection of D onto plane $Ox_1x_2 = Ox'$, Γ_1 and Γ_2 are the upper and the lower half-surfaces of the boundary Γ respectively defined as $\Gamma_k = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_k(\xi'), \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in S\}$, where $\xi_3 = \gamma_k(\xi_1, \xi_2), k = 1, 2$, are the equations of Γ_1 and Γ_2 respectively, functions $\gamma_k(\xi'), k = 1, 2$, are twice-differentiable in S ; L is the equator connecting Γ_1 and Γ_2 : $L = \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$.

We denote the projection of domain D onto the plane $Ox_1x_2 = Ox'$ as $\Gamma_0 = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_0(\xi') = 0, \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in S\}$. The coefficients $\alpha_{ijp}^{(k)}(x')$, $\alpha_{ip}^{(k)}(x')$, $i, k = 1, 2; j, p = 1, 2, 3$, satisfy Hölder condition in S , the right-hand sides $f_i(x')$, $i = 1, 2$, and $f_0(x)$ are continuous in S and L respectively.

The linear independent boundary conditions (1.2) as if «saw» the values of the desired function $u(x)$ and its partial derivatives on the half-surfaces Γ_1 and Γ_2 .

2. Fundamental solution

The **fundamental solution** of three-dimensional equation (1.1) has been obtained by means of Fourier transformation of equation (1.1) in the form [1]:

$$U(x - \xi) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{e^{i(\alpha, x - \xi)}}{\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} d\alpha. \quad (2.1)$$

The direct integration of super-singular integral (2.1) can be done by Hörmander ladder [5]. But the authors found another way: to represent the equation (1.1) in the form:

$$Lu(x) = \Delta \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) = 0. \quad (2.2)$$

Then the fundamental solution $U(x - \xi)$ of equation (2.2) satisfies the equation:

$$L_x U(x - \xi) = \Delta_x \frac{\partial}{\partial x_2} U(x - \xi) = \delta(x - \xi).$$

As the fundamental solution of three-dimensional Laplace equation is

$$\frac{\partial}{\partial x_2} U(x - \xi) = -\frac{1}{4\pi|x - \xi|},$$

then the fundamental solution of equation (1.1)

$$U(x - \xi) = -\frac{1}{4\pi} \ln|x_2 - \xi_2 + |x - \xi||. \quad (2.3)$$

3. Basic relationships and necessary conditions

Multiplying (1.1) by fundamental solution (2.3), integrating over the domain D and taking into account $L_x U(x - \xi) = \delta(x - \xi)$ where $\delta(x - \xi)$ is Dirac's δ -function we obtain **the first basic relationship**:

$$\int_{\Gamma} \Delta u(x) U(x - \xi) \cos(\nu, x_2) dx -$$

$$\begin{aligned}
& -\int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2} dx + \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu} dx = \\
& = \int_D u(x) \delta(x-\xi) dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi \in \Gamma. \end{cases} \quad (3.1)
\end{aligned}$$

The first relationship in (3.1) gives the representation of a general solution of (1.1) and the second one is **the first necessary condition**:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} u(\xi) = \int_{\Gamma} \Delta u(x) \left(-\frac{1}{4\pi} \ln|x_2 - \xi_2 + |x - \xi|| \right) \cos(\nu_x, x_2) dx - \\
& - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \xi|} \right) dx + \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{1}{4\pi} \ln|x_2 - \xi_2 + |x - \xi|| \right) dx, \quad \xi \in \Gamma,
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} u(\xi) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(\ln|x_2 - \xi_2 + |x - \xi|| \right) \Delta u(x) \cos(\nu_x, x_2) dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x - \xi|} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} dx + \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} u(x) \frac{\cos(x - \xi, \nu_x)}{|x - \xi|^2} dx, \quad \xi \in \Gamma. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

All the integrals in (3.2) have a weak singularity (the order of singularity doesn't exceed the multiplicity of the integrals).

So, we have proved the following

Theorem 3.1. *Let domain $D \subset R^3$ be convex along axis Ox_3 and bounded with piece-wise Lyapunov boundary Γ . Then the first necessary condition (3.2) is regular.*

Let us consider $|x - \xi|^2 \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_k(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}}^2$, $k=1, 2$:

$$\begin{aligned}
& |x - \xi|^2 \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_k(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}}^2 = |x' - \xi'|^2 + (\gamma_k(x') - \gamma_k(\xi'))^2 = \\
& |x' - \xi'|^2 \left[1 + \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_m} \right)^2 \cos^2(x' - \xi', x_m) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_2} \cos(x' - \xi', x_1) \cos(x' - \xi', x_2) + O(|x' - \xi'|) \right]. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Introducing notation

$$P_k(x', \xi') = 1 + \left[\frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_1} \cos(x' - \xi', x_1) + \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_2} \cos(x' - \xi', x_2) \right]^2 + O(|x' - \xi'|)$$

we can rewrite (3.3) as follows

$$|x - \xi|^2 \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_k(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} = |x' - \xi'|^2 P_k(x', \xi'). \quad (3.4)$$

Remark. Note that for $\xi' = x'$ we have:

$$P_k(x', x') = 1 + \left[\frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_2} \right]^2 \neq 0, \quad k = 1, 2.$$

If we expand each surface integral in (3.2) over the upper and lower half-surfaces $\Gamma_k = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_k(\xi')\}$, $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in S = pr_{\xi_3=0} \Gamma_k$, $k = 1, 2$, we'll obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\xi) \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{1}{4\pi} \int_S u(x) \Big|_{x_3 = \gamma_i(x')} \frac{\cos(x - \xi, \nu_x)}{|x - \xi|^2} \Big|_{\substack{\xi_3 = \gamma_k(\xi') \\ x_3 = \gamma_i(x')}} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} + \\ &+ \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|x - \xi|} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} \Big|_{\substack{\xi_3 = \gamma_k(\xi') \\ x_3 = \gamma_i(x')}} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} - \\ &- \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{1}{4\pi} \int_S (\ln|x - \xi| \cos(x - \xi, x_2) + 1) \Delta u(x) \cos(\nu_x, x_2) \Big|_{\substack{\xi_3 = \gamma_k(\xi') \\ x_3 = \gamma_i(x')}} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} \quad \xi \in \Gamma_k. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Obviously, when $k \neq i$ in (4.1), the corresponding integral is not singular. When $k = i$ in the first sum in (3.5), then the corresponding integral has a removable singularity at $x \rightarrow \xi$ and in the second sum from (3.5) the corresponding integral has a weak singularity, since the order of the singularity is less than the order of the integral's multiplicity. Therefore, denoting non-singular terms by ellipsis in (3.5) and taking into account (3.4), we obtain the first necessary condition in the form (for $k=1, 2$):

$$\frac{1}{2} u(\xi) \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} = (-1)^k \frac{1}{4\pi} \int_S u(x) \Big|_{x_3 = \gamma_k(x')} \frac{\cos(x - \xi, \nu_x)}{P_k(x', \xi') |x' - \xi'|^2} \Big|_{\substack{\xi_3 = \gamma_k(\xi') \\ x_3 = \gamma_k(x')}} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} + \dots \quad (3.6)$$

To derive the **second basic relationships** we multiply (1.1) by $\frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, 3}$, and integrate it over D applying integration by parts:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \Delta u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} \cos(\nu, x_1) dx - \int_{\Gamma} \Delta u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_i} \cos(\nu, x_2) dx + \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} \right) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi \in \Gamma, \end{cases} \quad i = \overline{1,3}, \quad (3.7)$$

the latter of which in (3.7) are **the second necessary conditions** ($\xi \in \Gamma$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos(x-\xi, x_i)}{|x-\xi|} \frac{\Delta u(x)}{(\cos(x-\xi, x_2)+1)} dx + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\cos(x-\xi, v_x)}{|x-\xi|^2} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-\xi|} \frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) dx, \quad i = \overline{1,3}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \frac{\cos(x-\xi, v_x)}{|x-\xi|^2} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-\xi|} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right) dx, \quad (3.8) \end{aligned}$$

Expanding in (3.8) each surface integral over the upper and lower half-surfaces $\Gamma_k = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_k(\xi^1)\}$, $\xi^1 = (\xi_1, \xi_2) \in S = pr_{\xi_3=0} \Gamma_k$, $k = \overline{1,2}$, we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=\gamma_i(\xi^1)} &= -\sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\cos(x-\xi, x_i)}{|x-\xi|} \frac{\Delta u(x)}{(\cos(x-\xi, x_2)+1)} \Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_3(\xi^1) \\ x_3=\gamma_j(x^1)}} dx + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\cos(x-\xi, v_x)}{|x-\xi|^2} \Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_3(\xi^1) \\ x_3=\gamma_j(x^1)}} dx + \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{|x-\xi|} \frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) \Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_3(\xi^1) \\ x_3=\gamma_j(x^1)}} dx, \quad i = \overline{1,3}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_3=\gamma_3(\xi^1)} &= \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \frac{\cos(x-\xi, v_x)}{|x-\xi|^2} \Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_3(\xi^1) \\ x_3=\gamma_j(x^1)}} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{(-1)^j}{|x-\xi|} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right) \Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_3(\xi^1) \\ x_3=\gamma_j(x^1)}} dx, \quad (3.9) \end{aligned}$$

Obviously, when $k \neq j$ in (3.9), the corresponding integral is not singular. When $k = j$ in (3.9), then the corresponding integrals have removable singularities at $x \rightarrow \xi$. Replacing the surface integrals in (3.9) with the integral over the projection S , denoting nonsingular terms with three dots we can rewrite the necessary conditions (3.9) as follows:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=\gamma_i(\xi^1)} = \frac{(-1)^k}{4\pi} \int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\cos(x-\xi, v_x)}{P_k(x', \xi^1) |x'-\xi|^2} \Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_3(\xi^1) \\ x_3=\gamma_i(x^1)}} dx + \dots, \quad i = \overline{1,3}. \quad (3.10)$$

All the integrals in (3.8), or (3.10), have weak singularities what proves

Theorem 3.2. *If the assumptions of Theorem 3.1 hold true then necessary conditions (3.10), or (3.8), are regular.*

To obtain the **third basic relationships** we multiply (1.1) by $\frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = \overline{1,3}$, and integrate it over D :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \Delta u(x) \left(\frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_i \partial x_j} \cos(\nu, x_2) - \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_2 \partial x_i} \cos(\nu, x_j) \right) dx + \\
& + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_2 \partial x_i} \cos(\nu, x_k) - \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_k \partial x_2} \cos(\nu, x_i) \right) dx + \\
& + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_k \partial x_2} \cos(\nu, x_k) dx = \begin{cases} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, & \xi \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

the latter of which in (3.11) are **the third necessary conditions** ($\xi \in \Gamma$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} &= \int_{\Gamma} \Delta u(x) \left(\frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_i \partial x_j} \cos(\nu, x_2) - \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_2 \partial x_i} \cos(\nu, x_j) \right) dx - \\
& - \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_k \partial x_2} \cos(\nu, x_i) - \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_2 \partial x_i} \cos(\nu, x_k) \right) dx + \\
& + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_k \partial x_2} \cos(\nu, x_k) dx, \quad i, j = \overline{1,3},
\end{aligned}$$

or, namely,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1^2} &= - \int_{\Gamma} \Delta u(x) \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_1) + \right. \\
& + \left. \frac{1}{4\pi} \frac{\cos^3(x-\xi, x_2) + \cos(x-\xi, x_2) \cos^2(x-\xi, x_3) + 1 - 2 \cos^2(x-\xi, x_1)}{|x-\xi|^2 (\cos(x-\xi, x_2) + 1)^2} \cos(\nu, x_2) \right) dx - \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} \frac{\cos(x-\xi, \nu)}{|x-\xi|^2} dx, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_2^2} &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1)}{|x-\xi|^2} \right) (\cos(\nu, x_2) - \cos(\nu, x_1)) dx - \\
& - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_2)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_2) - \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_2) \right) dx - \\
& - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_3)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_2) - \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_3) \right) dx + \\
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, \nu)}{|x-\xi|^2} \right) dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_3^2} &= - \int_{\Gamma} \Delta u(x) \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_3)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_3) + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-\xi|^2} \times \right. \\
&\times \left. \frac{\cos^3(x-\xi, x_2) + \cos^2(x-\xi, x_1) \cos(x-\xi, x_2) + 1 - 2 \cos^2(x-\xi, x_3)}{(\cos(x-\xi, x_2) + 1)^2} \cos(\nu, x_2) \right) dx - \\
&- \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3 \partial x_1} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_3)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_3) - \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_3)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_1) \right) dx + \\
&\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, \nu)}{|x-\xi|^2} \right) dx, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi_3 = \nu_1(\xi')} &= \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_2)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_1) - \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_2) \right) dx + \\
+ \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_3)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_1) - \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_3) \right) dx - \\
&\quad - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, \nu)}{|x-\xi|^2} \right) dx, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_3)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_2) + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-\xi|^2} \times \right. \\
&\times \left. \frac{\cos^3(x-\xi, x_2) + \cos^2(x-\xi, x_1) \cos(x-\xi, x_2) + 1 - 2 \cos^2(x-\xi, x_3)}{(\cos(x-\xi, x_2) + 1)^2} \cos(\nu, x_3) \right) dx - \\
&- \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, \nu)}{|x-\xi|^2} \right) dx, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} &= \int_{\Gamma} \Delta u(x) \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_3) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-\xi|^2} \frac{\cos(x-\xi, x_1) \cos(x-\xi, x_3) (\cos(x-\xi, x_2) + 2)}{(\cos(x-\xi, x_2) + 1)^2} \cos(\nu, x_2) \right) dx + \\
&+ \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3 \partial x_2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_2)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_1) - \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1)}{|x-\xi|^2} \cos(\nu, x_2) \right) dx + \\
&\quad - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, \nu)}{|x-\xi|^2} \right) dx. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Splitting the surface integrals in (3.12) over Γ into two integrals over upper and lower half-surfaces Γ_1 and Γ_2 , then replacing them with the integral over the projection S , denoting nonsingular terms with three dots and introducing the following notations

$$\begin{aligned}
K_{11,\Delta}^{(k)}(x', \xi') &= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1) \cos(\nu, x_1)}{P_k(x', \xi')} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4\pi} \frac{\cos^3(x-\xi, x_2) + \cos(x-\xi, x_2) \cos^2(x-\xi, x_3) + 1 - 2\cos^2(x-\xi, x_1)}{P_k(x', \xi')(\cos(x-\xi, x_2) + 1)^2} \cos(\nu, x_2) \right) \Bigg|_{x_3=\gamma_k(\xi')}^{\xi_3=\gamma_k(\xi')}, \\
K_{11,lm}^{(k)}(x', \xi') &= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_m) \cos(\nu, x_1) - \cos(x-\xi, x_1) \cos(\nu, x_m)}{P_k(x', \xi')} \right) \Bigg|_{x_3=\gamma_k(\xi')}^{\xi_3=\gamma_k(\xi')}, m = 2, 3, \\
K_{22,pm}^{(k)}(x', \xi') &= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{(\cos(\nu, x_p) - \cos(\nu, x_1)) \cos(x-\xi, x_m)}{P_k(x', \xi')} \right) \Bigg|_{x_3=\gamma_k(\xi')}^{\xi_3=\gamma_k(\xi')}, p = 2, m = \overline{1, 3}, \\
K_{33,31}^{(k)}(x', \xi') &= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{(\cos(\nu, x_3) - \cos(\nu, x_1)) \cos(x-\xi, x_3)}{P_k(x', \xi')} \right) \Bigg|_{x_3=\gamma_k(\xi')}^{\xi_3=\gamma_k(\xi')}, \\
K_{33,\Delta}^{(k)}(x', \xi') &= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos^2(x-\xi, x_3)}{P_k(x', \xi')} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4\pi} \frac{\cos^3(x-\xi, x_2) + \cos^2(x-\xi, x_1) \cos(x-\xi, x_2) + 1 - 2\cos^2(x-\xi, x_3)}{(\cos(x-\xi, x_2) + 1)^2 P_k(x', \xi')} \cos(\nu, x_2) \right) \Bigg|_{x_3=\gamma_k(\xi')}^{\xi_3=\gamma_k(\xi')}, \\
K_{23,33}^{(k)}(x', \xi') &= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_2) \cos(x-\xi, x_3)}{P_k(x', \xi')} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4\pi} \frac{\cos^3(x-\xi, x_2) + \cos^2(x-\xi, x_1) \cos(x-\xi, x_2) + 1 - 2\cos^2(x-\xi, x_3)}{(\cos(x-\xi, x_2) + 1)^2} \cos(\nu, x_3) \right) \Bigg|_{x_3=\gamma_k(\xi')}^{\xi_3=\gamma_k(\xi')}, \\
K_{12,12}^{(k)}(x', \xi') &= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{(\cos(\nu, x-\xi))}{P_k(x', \xi')} \right) \Bigg|_{x_3=\gamma_k(\xi')}^{\xi_3=\gamma_k(\xi')}, \\
K_{13,\Delta}^{(k)}(x', \xi') &= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1) \cos(x-\xi, x_3)}{P_k(x', \xi')} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-\xi, x_1) \cos(x-\xi, x_3) (\cos(x-\xi, x_2) + 2)}{(\cos(x-\xi, x_2) + 1)^2 P_k(x', \xi')} \cos(\nu, x_2) \right) \Bigg|_{x_3=\gamma_k(\xi')}^{\xi_3=\gamma_k(\xi')}, \\
K_{13,32}^{(k)}(x', \xi') &= \left(\frac{1}{4\pi} \frac{(\cos(\nu, x_2) - \cos(\nu, x_1)) \cos(x-\xi, x_1)}{P_k(x', \xi')} \right) \Bigg|_{x_3=\gamma_k(\xi')}^{\xi_3=\gamma_k(\xi')},
\end{aligned}$$

we can rewrite the necessary condition (3.12) with singular or weakly singular terms:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')} &= -(-1)^k \int_S \Delta u(x) \Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')} \frac{K_{11,\Delta}^{(k)}(x', \xi')}{|x' - \xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')} &= (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')} \frac{K_{22,21}^{(k)}(x', \xi')}{|x' - \xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{K_{22,22}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{K_{22,23}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_3^2} \Big|_{\xi_3=\gamma_4(\xi')} & = (-1)^{k+1} \int_S \Delta u(x) \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{K_{33,\Delta}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \\
& + (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3 \partial x_1} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{K_{33,31}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi_3=\gamma_4(\xi')} & = (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{K_{12,12}^{(k)}(x', \xi')}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)}, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=\gamma_4(\xi')} & = (-1)^{k+1} \int_S \Delta u(x) \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{K_{13,\Delta}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \\
& + (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3 \partial x_2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{K_{13,32}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=\gamma_4(\xi')} & = (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{K_{23,33}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Thus, we can establish the following

Theorem 3.2. *If the assumptions of Theorem 3.1 hold true then necessary conditions (3.13) are singular.*

4. Regularization of necessary conditions

Multiplying $\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_m \partial \xi_j} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')}$, $m, j = \overline{1,3}$, by coefficients $\beta_{i,mj}^{(k)}(\xi')$ under assumption that functions $\beta_{i,ml}^{(k)}(\xi')$ satisfy Hölder condition we build their linear combinations and substitute the necessary conditions (3.6), (3.10), (3.13) we obtain

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left[\beta_{i,11}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \beta_{i,22}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_2^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \beta_{i,33}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_3^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \right. \\
& \left. + \beta_{i,12}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \beta_{i,13}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \beta_{i,23}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} \right] = \\
& = \sum_{k=1}^2 \beta_{i,11}^{(k)}(\xi') (-1)^{k+1} \left[\int_S \Delta u(x) \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{11,\Delta}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots \right] + \\
& + \sum_{k=1}^2 \beta_{i,22}^{(k)}(\xi') \left[(-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{22,21}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \right. \\
& \left. + (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{22,22}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{22,23}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^2 \beta_{i,33}^{(k)}(\xi') \left[(-1)^{k+1} \int_S \Delta u(x) \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{33,\Delta}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \right. \\
& \left. + (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3 \partial x_1} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{33,31}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots \right] + \\
& + \sum_{k=1}^2 \beta_{i,12}^{(k)}(\xi') \left[(-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{12,12}^{(k)}(x', \xi')}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots \right] + \\
& + \sum_{k=1}^2 \beta_{i,13}^{(k)}(\xi') \left[(-1)^{k+1} \int_S \Delta u(x) \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{13,\Delta}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \right. \\
& \left. + (-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3 \partial x_2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{13,32}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots \right] + \\
& + \sum_{k=1}^2 \beta_{i,23}^{(k)}(\xi') \left[(-1)^{k+1} \int_S \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} \frac{2K_{23,33}^{(k)}}{|x'-\xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)} + \dots \right]. \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Entering in (4.1) the coefficients $\beta_{i,ml}^{(k)}(\xi')$ under the integral, subtracting and adding $\beta_{i,ml}^{(k)}(x')$ and taking into account that functions $\beta_{i,ml}^{(k)}(\xi')$ satisfy Hölder condition: $|\beta_{i,ml}^{(k)}(\xi') - \beta_{i,ml}^{(k)}(x')| < C|\xi' - x'|^\alpha, 0 < \alpha < 1$, and, consequently, all the integrals containing $\beta_{i,ml}^{(k)}(\xi') - \beta_{i,ml}^{(k)}(x')$ have a weak singularity we shall leave only singular terms and rewrite (4.1) as follows

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left[\sum_{j=1}^3 \beta_{i,jl}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_j^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \sum_{\substack{p,l=1 \\ p < l}}^3 \beta_{i,pl}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_p \partial \xi_l} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} \right] = \\
& = \sum_{k=1}^2 \int_S \frac{1}{|x'-\xi'|^2} \left((-1)^{k+1} \beta_{i,11}^{(k)}(x') \Delta u(x) \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{11,\Delta}^{(k)} + \right. \\
& + (-1)^{k+1} \beta_{i,22}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{22,21}^{(k)} + (-1)^{k+1} \beta_{i,22}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{22,22}^{(k)} + \\
& + (-1)^{k+1} \beta_{i,22}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{22,23}^{(k)} + (-1)^{k+1} \beta_{i,33}^{(k)}(x') \Delta u(x) \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{33,\Delta}^{(k)} + \\
& + (-1)^{k+1} \beta_{i,33}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3 \partial x_1} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{33,31}^{(k)} + (-1)^{k+1} \beta_{i,12}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{12,12}^{(k)}(x', \xi') + \\
& + (-1)^{k+1} \beta_{i,13}^{(k)}(x') \Delta u(x) \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{13,\Delta}^{(k)} + \beta_{i,13}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3 \partial x_2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{13,32}^{(k)} + \\
& \left. + (-1)^{k+1} \beta_{i,23}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=\gamma_4(x')} 2K_{23,33}^{(k)} \right) \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)}. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

As all the coefficients $K_{ml,jj}^{(k)}(x', \xi'), m, l, i, j = \overline{1,3}$, in (4.2) can be expanded by Taylor's formula as follows

$$K_{m,l;j}^{(k)}(x', \xi') = K_{m,l;j}^{(k)}(x', x') + \dots$$

where three dots contain nonsingular terms. Then substituting this formulas into the above integrals we shall mean $K_{m,l;j}^{(k)} = K_{m,l;j}^{(k)}(x', x')$.

Grouping the terms in (4.2) containing $\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial x_m \partial x_j} \Big|_{x_i=\gamma_i(x')}$, $m, j = \overline{1,3}$, and compared to the boundary conditions we get the following system of equations for the unknowns $\beta_{i,mj}^{(k)}(x')$, $i = 1,2; m, j = \overline{1,3}$, which can be represented in a matrix form:

$$\begin{pmatrix} (-1)^{k+1} 2K_{1,1,\Delta}^{(k)} & 0 & (-1)^{k+1} 2K_{1,3,\Delta}^{(k)} & 0 & 0 & (-1)^{k+1} 2K_{3,3,\Delta}^{(k)} \\ (-1)^{k+1} 2K_{1,1,\Delta}^{(k)} & 0 & (-1)^{k+1} 2K_{1,3,\Delta}^{(k)} & (-1)^{k+1} 2K_{2,2,22}^{(k)} & 0 & (-1)^{k+1} 2K_{3,3,\Delta}^{(k)} \\ (-1)^{k+1} 2K_{1,1,\Delta}^{(k)} & 0 & (-1)^{k+1} 2K_{1,3,\Delta}^{(k)} & 0 & (-1)^{k+1} 2K_{2,3,33}^{(k)} & (-1)^{k+1} 2K_{3,3,\Delta}^{(k)} \\ 0 & (-1)^{k+1} 2K_{1,2,12}^{(k)} & 0 & (-1)^{k+1} 2K_{2,2,21}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{k+1} 2K_{3,3,31}^{(k)} \\ 0 & 0 & (-1)^{k+1} 2K_{1,3,32}^{(k)} & (-1)^{k+1} 2K_{2,2,23}^{(k)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{i,11}^{(k)}(x') \\ \beta_{i,12}^{(k)}(x') \\ \beta_{i,13}^{(k)}(x') \\ \beta_{i,22}^{(k)}(x') \\ \beta_{i,23}^{(k)}(x') \\ \beta_{i,33}^{(k)}(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,11}^{(k)}(x') \\ \alpha_{i,12}^{(k)}(x') \\ \alpha_{i,13}^{(k)}(x') \\ \alpha_{i,22}^{(k)}(x') \\ \alpha_{i,23}^{(k)}(x') \\ \alpha_{i,33}^{(k)}(x') \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

or

$$A^{(k)} \beta^{(k)} = \frac{1}{64} \alpha^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

The determinant $|A^{(k)}|$ of system (4.3) can be reduced to the form:

$$|A^{(k)}| = K_{1,2,12}^{(k)} K_{2,3,33}^{(k)} K_{3,3,31}^{(k)} \begin{vmatrix} K_{1,1,\Delta}^{(k)} & K_{1,3,\Delta}^{(k)} & 0 \\ K_{1,1,\Delta}^{(k)} & K_{1,3,\Delta}^{(k)} & K_{2,2,12}^{(k)} \\ 0 & K_{1,3,32}^{(k)} & K_{2,2,23}^{(k)} \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Evidently, we have obtained

Theorem 4.1. System (4.3) has a unique solution $\beta^{(k)} = (\beta_{i,11}^{(k)}, \beta_{i,12}^{(k)}, \beta_{i,13}^{(k)}, \beta_{i,22}^{(k)}, \beta_{i,23}^{(k)}, \beta_{i,33}^{(k)})$ if the determinant (4.4) doesn't vanish: $|A^{(k)}| \neq 0$.

After having solved the system (4.3) and substituting the values of $\beta_{i,j}^{(k)}$, $i, j = \overline{1,3}$, into (4.1) we get regularized relationships:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^2 \left[\sum_{j=1}^3 \beta_{i,j}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_j^2} \Big|_{x_i=\gamma_i(x')} + \sum_{\substack{\rho, l=1 \\ \rho < l}}^3 \beta_{i,\rho l}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_\rho \partial \xi_l} \Big|_{x_i=\gamma_i(x')} \right] = \\ & = \int_s \frac{1}{|x' - \xi|^2} \sum_{k=1}^2 \left[\alpha_{i,11}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} \Big|_{x_i=\gamma_i(x')} + \alpha_{i,22}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_i=\gamma_i(x')} + \alpha_{i,33}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_i=\gamma_i(x')} + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_{i,12}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_i=\gamma_i(x')} + \alpha_{i,13}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_i=\gamma_i(x')} + \alpha_{i,23}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_i=\gamma_i(x')} + \dots \right] \frac{dx'}{\cos(\nu, x_3)}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Taking into account that from boundary conditions (2.2) we have

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left[\alpha_{i,11}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \alpha_{i,22}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \alpha_{i,33}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \right. \\
& \left. + \alpha_{i,12}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \alpha_{i,13}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \alpha_{i,23}^{(m)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} \right] = \\
& = f_i(x') - \sum_{j=1}^3 \left[\alpha_{ij}^{(1)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_1(x')} + \alpha_{ij}^{(2)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_2(x')} \right] - \\
& \quad - \left[\alpha_i^{(1)}(x') u(x', \gamma_1(x')) + \alpha_i^{(2)}(x') u(x', \gamma_2(x')) \right], \quad i = \overline{1,3}, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

and substituting (4.6) into (4.5) we get

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left[\sum_{j=1}^3 \beta_{i,j}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_j^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \sum_{\substack{p,j=1 \\ p < j}}^3 \beta_{i,pj}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_p \partial \xi_j} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} \right] = \\
& = \int_S \frac{f_i(x')}{|x' - \xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 \int_S \frac{1}{|x' - \xi'|^2} \alpha_{ij}^{(k)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} - \\
& \quad - \sum_{k=1}^2 \int_S \frac{1}{|x' - \xi'|^2} \alpha_i^{(k)}(x') u(x', \gamma_k(x')) \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)}. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Substituting the necessary conditions for $u(x', \gamma_k(x'))$, $\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_j(x')}$, $j=1,2,3$; $k=1,2$, into

(4.7) and changing the order of integration we obtain regularized relationships:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left[\sum_{j=1}^3 \beta_{i,j}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_j^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} + \sum_{\substack{p,j=1 \\ p < j}}^3 \beta_{i,pj}^{(m)}(\xi') \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_p \partial \xi_j} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} \right] = \\
& = \int_S \frac{f_i(x')}{|x' - \xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)} - \\
& - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 \int \frac{\partial u(z)}{\partial z_j} \Big|_{\substack{x_3=\gamma_j(x') \\ z_3=\gamma_k(z')}} \left[\frac{(-1)^k}{4\pi} \int_S \frac{\alpha_{ij}^{(k)}(x') \cos(z-x, \nu_z)}{|x' - \xi'|^2} \frac{P_k(z', x') |z' - x'|^2}{\cos(\nu_x, x_3)} \frac{dx'}{\cos(\nu_z, z_3)} \right] - \\
& - \sum_{k=1}^2 \int u(z) \Big|_{\substack{x_3=\gamma_1(x') \\ z_3=\gamma_1(z')}} \left[\frac{(-1)^k}{4\pi} \int_S \frac{\alpha_i^{(k)}(x') \cos(z-x, \nu_z)}{|x' - \xi'|^2} \frac{P_k(z', x') |z' - x'|^2}{\cos(\nu_x, x_3)} \frac{dx'}{\cos(\nu_z, z_3)} \right] + \dots \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Evidently, if the right-hand sides $f_i(x')$, $i=\overline{1,3}$, of the boundary conditions (2.2) are continuously differentiable in S and vanish at the boundary ∂S then integrals $\int_S \frac{f_i(x')}{|x' - \xi'|^2} \frac{dx'}{\cos(\nu_x, x_3)}$ converge in Cauchy sense.

Thus, we have obtained three regular relationships (4.7) and proved the following

Theorem 4.2. If $\alpha_{ipq}^{(m)}(x')$, $i = \overline{1,3}$, $m = 1,2$; $p, q = \overline{1,3}$; $x \in S$, belong to a Hölder class with index $\mu > 0$ and $\alpha_i^{(m)}(x') \in C(S)$, $i = \overline{1,3}$, $m = 1,2$; $x \in S$, and $f_i(x') \in C^{(1)}(S)$, $f_i(x')|_{\partial S} = 0$, $i = \overline{1,3}$, then under the conditions of Theorems 3.2 and

4.1 the relationships (4.8) are regular.

5. Fredholm property

The unknowns $u(\xi)|_{\xi_i=\gamma_i(\xi)}$, $\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}|_{\xi_i=\gamma_i(\xi)}$, $\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}|_{\xi_i=\gamma_i(\xi)}$, $i, j = \overline{1,3}$, $k = 1,2$, can be expressed by the derivatives $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)}$, $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2}|_{x_3=\gamma_3(x)}$, $k = 1,2$.

In the virtue of the formulas of calculus we have:

$$\frac{\partial}{\partial x_p} u(x_1, x_2, \gamma_k(x_1, x_2)) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_p}|_{x_3=\gamma_3(x)} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_p},$$

$$k=1,2; p=1,2,$$

whence we have

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_p}|_{x_3=\gamma_3(x)} = \frac{\partial u(x', \gamma_k(x'))}{\partial x_p} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_p},$$

$$p=1,2; k=1,2. \quad (5.1)$$

as well as for the second derivatives we have

$$\frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_j} u(x_1, x_2, \gamma_k(x_1, x_2)) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_p \partial x_j}|_{x_3=\gamma_3(x)} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_p \partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_p} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_p} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial^2 \gamma_k(x')}{\partial x_p \partial x_j}$$

whence

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_p \partial x_j}|_{x_3=\gamma_3(x)} = \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_j} u(x', \gamma_k(x')) -$$

$$- \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_p \partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_p} -$$

$$- \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_p} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial^2 \gamma_k(x')}{\partial x_p \partial x_j}, \quad (5.2)$$

$$p, j = 1,2, k = 1,2$$

Let us write (5.2) in open form:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}|_{x_3=\gamma_3(x)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x', \gamma_k(x')) -$$

$$- \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_1} -$$

$$- \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2}|_{x_3=\gamma_3(x)} \left(\frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial^2 \gamma_k(x')}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}|_{x_3=\gamma_3(x)} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x', \gamma_k(x')) -$$

$$- \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_2} -$$

$$- \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2}|_{x_3=\gamma_3(x)} \left(\frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial u(x)}{\partial x_3}|_{x_3=\gamma_3(x)} \frac{\partial^2 \gamma_k(x')}{\partial x_2^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(x', \gamma_k(x')) - \\ &\quad - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_1} - \\ &\quad - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')} \frac{\partial^2 \gamma_k(x')}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad k=1,2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Substituting the expressions for $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $i, j = \overline{1,2}$,

$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $j=1,2$, from (5.1), (5.3) into the left-hand sides of the boundary conditions (1.2) and relationships (4.7), we'll get a system of 6 equations with respect to 6 unknowns $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $k=1,2$:

$$\sum_{k=1}^2 \left[A_{i,13}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{\gamma_k(x')} + A_{i,23}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{\gamma_k(x')} + A_{i,33}^{(k)}(x') \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{\gamma_k(x')} \right] = F_i(x'), \quad i = \overline{1,6}, \quad (5.4)$$

where $F_i(x')$, $i = \overline{1,6}$, are functionals:

$$F_i(x') = F_i(u_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\Gamma_i}, k=1,2).$$

Theorem 5.1. If the determinant of system (5.4) is not equal to zero then system (5.4) has a unique solution

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} &= \Phi_{13}^{(m)}(u_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\Gamma_i}, k=1,2), \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} &= \Phi_{23}^{(m)}(u_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\Gamma_i}, k=1,2), \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=\gamma_m(x')} &= \Phi_{33}^{(m)}(u_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Big|_{\Gamma_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\Gamma_i}, k=1,2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

From the necessary conditions (3.8) and (3.13), relationships (5.1), (5.3) and (5.5) we get Fredholm integral equations. Thus, we have established

Theorem 5.2. Under assumptions of Theorem 4.2 and Theorem 5.1 problem 1.1-1.2 has Fredholm property.

REFERENCES

1. Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics, Moscow: Mir, 1981.
2. Bitsadze A.V. Boundary value problems for elliptic equations of second order, Moscow, 1966, Nauka, 203 p.
3. Mustafayeva Y.Y., Aliyev N.A. New Method of Solvability of a Three-dimensional Laplace Equation with Nonlocal Boundary Conditions. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, Kharkov, 2016, vol. 12, No. 3, pp. 185-204.

4. Mustafayeva Y.Y., Aliyev N.A. New method of investigation of the Fredholm property of three-dimensional Helmholtz equation with nonlocal boundary value conditions, J. Filomat, 2018, vol.32, issue 12, pp. 4445-4460.
5. Hörmander L. Differential operators of basic type, Math. Ann., 140, 124-146, 1960.

ÜÇÖLÇÜLÜ KOMPOZİT TƏNLİYİN FREDHOLMLUĞUNUN YENİ ÜSUL İLƏ ARAŞDIRILMASI

Y.Y.MUSTAFAYEVA, N.A.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Məqalə yeni yanaşmadan istifadə etməklə qeyri-lokal sərhəd şərtləri ilə üçüncü dərəcəli üçölçülü kompozit tənliyin Fredholm xassəsinin öyrənilməsinə, o cümlədən fundamental həllin qurulması, əsas münasibətlərin tapılması və əldə edilmiş zəruri şərtlərin requlyarizasiyasına həsr edilmişdir.

Açar sözlər: üçüncü dərəcəli üçölçülü kompozit tənlik, fundamental həll, əsas münasibətlər, zəruri şərtlər, requlyarizasiya, Fredholm xassəsi.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ТРЕХМЕРНОГО СОСТАВНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НОВЫМ МЕТОДОМ

Е.Ю.МУСТАФАЕВА, Н.А.АЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

Статья посвящена исследованию фредгольмовости трехмерного составного уравнения третьего порядка с нелокальными краевыми условиями с помощью нового подхода, включающего построение фундаментального решения, нахождение основных соотношений и регуляризацию полученных необходимых условий.

Ключевые слова: трехмерное составное уравнение третьего порядка, фундаментальное решение, основные соотношения, необходимые условия, регуляризация, фредгольмовость.

УДК 517.977.52

**НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И
ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И
РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**^{1,2}К.Б.МАНСИМОВ, ³В.Г.РЗАЕВА¹*Бакинский Государственный Университет*²*Институт Систем управления НАН Азербайджана*³*Сумгаитский Государственный Университет**kamilbmansimov@gmail.com*

Рассматривается задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая в различных областях совокупностью гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра и двумерных интегральных уравнений Вольтерра.

При предположении открытости области управления установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра, гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение, вариация функционала, аналог уравнения Эйлера, аналог условия Лежандра Клебша, классический экстремаль, необходимое условие оптимальности.

1. Введение

Многие довольно сложные процессы описываются различными интегральными или же интегро-дифференциальными уравнениями (см. напр., [1-3]).

Исходя из теоретических и практических побуждений, разными авторами изучены ряд аспектов задач оптимального управления, описываемые различными интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями (см. напр., [2, 4-6]). Но теория необходимых условий оптимальности управления для таких задач еще мало разработано. Отчасти это связано с возникающими трудностями при исследовании подобных задач оптимального управления.

В предлагаемой работе впервые ставится, и исследуется одна за-

дача оптимального управления, описываемая совокупностью двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра и гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

2. Постановка задачи. Пусть $U_1 \subset R^r, U_2 \subset R^q$ – некоторые заданные непустые, ограниченные и открытые множества, $D_1 = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$, $D_2 = [t_1, t_2] \times [x_0, x_1]$ ($t_0 < t_1 < t_2; x_0 < x_1$) заданные прямоугольники, $u_1(t, x), u_2(t, x)$ – r и q -мерные соответственно измеримые и ограниченные управляющие вектор-функции, удовлетворяющие ограничениям

$$u_1(t, x) \in U_1 \subset R^r, \quad (t, x) \in D_1, \quad (1)$$

$$u_2(t, x) \in U_2 \subset R^q, \quad (t, x) \in D_2. \quad (2)$$

Пару $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ – удовлетворяющую ограничениям (1)-(2) назовем допустимым управлением.

Предположим, что управляемый процесс в области D_1 описывается следующей краевой задачей Гурса

$$\frac{\partial^2 z_1(t, x)}{\partial t \partial x} = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [A_1(t, x, \tau, s) z_1(\tau, s) + f_1(t, x, \tau, s, u_1(\tau, s))] ds d\tau, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z_1(t_0, x) &= a(x), & x \in [x_0, x_1], \\ z_1(t, x_0) &= b(t), & t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (4)$$

а в области D_2 системой двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$z_2(t, x) = \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x [A_2(t, x, \tau, s) z_2(\tau, s) + f_2(t, x, \tau, s, u_2(\tau, s))] ds d\tau + G(z_1(t_1, x)). \quad (5)$$

Здесь $A_i(t, x, \tau, s), i=1, 2$ – заданные n -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных, $f_i(t, x, \tau, s, u_i), i=1, 2$ – заданные n -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $u_i, i=1, 2$ до второго порядка включительно, $a(x)$ и $b(t)$ – заданные абсолютно непрерывные n -мерные вектор-функции, $G(z_1)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая n -мерная вектор-функция.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $z_1(t, x)$ краевой задачи (3)-(4) и единственное непрерывное решение $z_2(t, x)$ интегрального уравнения (5).

На решениях задачи (3)-(5) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим терминальный функционал

$$J(u_1, u_2) = \varphi_1(z_1(t_1, x_1)) + \varphi_2(z_2(t_2, x_1)). \quad (6)$$

Здесь $\varphi_i(z_i)$, $i=1,2$ – заданные, дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление $(u_1(t,x), u_2(t,x))$, доставляющее минимальное значение функционалу (6) при ограничениях (1)-(5), назовем оптимальным управлением.

Целью работы является вывод ряда необходимых условий оптимальности первого и второго порядков, в рассматриваемой задаче.

3. Вычисление вариации функционала качества. Пусть $(u_1(t,x), u_2(t,x), z_1(t,x), z_2(t,x))$ и $(\bar{u}_1(t,x) = u_1(t,x) + \Delta u_1(t,x), \bar{u}_2(t,x) = u_2(t,x) + \Delta u_2(t,x), \bar{z}_1(t,x) = z_1(t,x) + \Delta z_1(t,x), \bar{z}_2(t,x) = z_2(t,x) + \Delta z_2(t,x))$ – некоторые допустимые процессы.

Тогда ясно, что $(\Delta z_1(t,x), \Delta z_2(t,x))$ будет решением задачи

$$\frac{\partial^2 \Delta z_1(t,x)}{\partial t \partial x} = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [A_1(t,x,\tau,s) \Delta z_1(\tau,s) + (f_1(t,x,\tau,s, \bar{u}_1(\tau,s)) - f_1(t,x,\tau,s, u_1(\tau,s)))] ds d\tau, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta z_1(t_0, x) &= 0, \\ \Delta z_1(t, x_0) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta z_2(t,x) &= \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x [A_2(t,x,\tau,s) \Delta z_2(\tau,s) + \\ &+ (f_2(t,x,\tau,s, \bar{u}_2(\tau,s)) - f_2(t,x,\tau,s, u_2(\tau,s)))] ds d\tau + \\ &+ G(\bar{z}_1(t_1, x)) - G(z_1(t_1, x)). \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $\psi_i(t,x)$, $i=1,2$ пока произвольные n -мерные вектор-функции.

Тогда из тождеств (7) и (9) получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi_1'(t,x) \frac{\partial^2 \Delta z_1(t,x)}{\partial t \partial x} dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\psi_1'(t,x) \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [A_1(t,x,\tau,s) \Delta z_1(\tau,s) + (f_1(t,x,\tau,s, \bar{u}_1(\tau,s)) - f_1(t,x,\tau,s, u_1(\tau,s)))] ds d\tau \right] dx dt, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \psi_2'(t,x) \Delta z_2(t,x) dx dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \psi_2'(t,x) [A_2(t,x,\tau,s) \Delta z_2(\tau,s) + \right. \\ &\left. + (f_2(t,x,\tau,s, \bar{u}_2(\tau,s)) - f_2(t,x,\tau,s, u_2(\tau,s)))] ds d\tau \right] dx dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \psi_2'(t,x) [G(\bar{z}_1(t_1, x)) - G(z_1(t_1, x))] dx dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая краевые условия (9) и применяя формулу Грина для прямоугольных областей получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi_1'(t,x) \frac{\partial^2 \Delta z_1(t,x)}{\partial t \partial x} dx dt = \psi_1'(t_1, x_1) \Delta z_1(t_1, x_1) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \psi_1'(t, x_1)}{\partial t} \Delta z_1(t, x_1) dt -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \psi_1'(t_1, x)}{\partial x} \Delta z_1(t_1, x) dx + \int_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} \frac{\partial^2 \psi_1'(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta z_1(t, x) dx dt. \quad (12)$$

Далее на основании формулы Фубини получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} \left[\int_{t_0, x_0}^t \int_{x_0}^x \psi_1'(t, x) [A_1(t, x, \tau, s) \Delta z_1(\tau, s) + \right. \\ & \left. + (f_1(t, x, \tau, s, \bar{u}_1(\tau, s)) - f_1(t, x, \tau, s, u_1(\tau, s)))] ds d\tau \right] dx dt = \\ & = \int_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} \left[\int_{t_0, x_0}^t \int_{x_0}^x \psi_1'(\tau, s) [A_1(\tau, s, t, x) \Delta z_1(t, x) + \right. \\ & \left. + (f_1(\tau, s, t, x, \bar{u}_1(t, x)) - f_1(\tau, s, t, x, u_1(t, x)))] ds d\tau \right] dx dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая тождества (10)-(13), а также применяя формулу Тейлора, приращение функционала (6) записывается в виде

$$\begin{aligned} J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) &= \frac{\partial \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1} \Delta z_1(t_1, x_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \Delta z_1(t_1, x_1) + o_1(\|\Delta z_1(t_1, x_1)\|^2) + \frac{\partial \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2} \Delta z_2(t_2, x_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta z_2'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} \Delta z_2(t_2, x_1) + o_2(\|\Delta z_2(t_1, x_1)\|^2) + \\ &+ \psi_1'(t_1, x_1) \Delta z_1(t_1, x_1) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \psi_1'(t, x_1)}{\partial t} \Delta z_1(t, x_1) dt - \\ &- \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \psi_1'(t_1, x)}{\partial x} \Delta z_1(t_1, x) dx + \int_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} \frac{\partial^2 \psi_1'(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta z_1(t, x) dx dt - \\ &- \int_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} \left[\int_{t_0, x_0}^t \int_{x_0}^x \psi_1'(\tau, s) A_1(\tau, s, t, x) ds d\tau \right] \Delta z_1(t, x) dx dt - \\ &- \int_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} \left[\int_{t_0, x_0}^t \int_{x_0}^x \psi_1'(\tau, s) (f_1(\tau, s, t, x, \bar{u}_1(t, x)) - f_1(\tau, s, t, x, u_1(t, x))) ds d\tau \right] dx dt + \\ &+ \int_{t_1, x_0}^{t_2, x_1} \psi_2'(t, x) \Delta z_2(t, x) dx dt - \\ &- \int_{t_1, x_0}^{t_2, x_1} \left[\int_{t_1, x_0}^t \int_{x_0}^x \psi_2'(\tau, s) A_2(\tau, s, t, x) ds d\tau \right] \Delta z_2(t, x) dx dt - \\ &- \int_{t_1, x_0}^{t_2, x_1} \left[\int_{t_1, x_0}^t \int_{x_0}^x \psi_2'(\tau, s) (f_2(\tau, s, t, x, \bar{u}_2(t, x)) - f_2(\tau, s, t, x, u_2(t, x))) ds d\tau \right] dx dt - \\ &- \int_{t_1, x_0}^{t_2, x_1} \psi_2'(t, x) [G(\bar{z}_1(t_1, x_1)) - G(z_1(t_1, x_1))] dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x)) &= \psi_2'(t, x) G(z_1(t_1, x)), \\ N(z_1) &= \frac{\partial \varphi_2(z_2(t_1, x_1))}{\partial z_2} G(z_1), \end{aligned}$$

$$H_1(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x)) = \int_t^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi_1'(\tau, s) f_1(\tau, s, t, x, u_1(t, x)) ds d\tau,$$

$$H_2(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x)) = -\frac{\partial \varphi_2'(z_2(t_1, x_1))}{\partial z_2} f_2(t_2, x_1, t, x, u_2(t, x)) +$$

$$+ \int_t^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi_2'(\tau, s) f_2(\tau, s, t, x, u_2(t, x)) ds d\tau.$$

Применяя формулу Тейлора, получаем, что

$$M(\psi_2(t, x), \bar{z}_1(t_1, x)) - M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x)) = \frac{\partial M'(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1} \Delta z_1(t_1, x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1^2} \Delta z_1(t_1, x) + o_3(\|\Delta z_1(t_1, x)\|^2), \quad (15)$$

$$N(\bar{z}_1(t_1, x)) - N(z_1(t_1, x)) = \frac{\partial N'(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1} \Delta z_1(t_1, x_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \Delta z_1(t_1, x_1) + o_4(\|\Delta z_1(t_1, x)\|^2), \quad (16)$$

$$H_i(t, x, \bar{u}_i(t, x), \psi_i(t, x)) - H_i(t, x, u_i(t, x), \psi_i(t, x)) =$$

$$= \frac{\partial H_i'(t, x, u_i(t, x), \psi_i(t, x))}{\partial u_i} \Delta u_i(t, x) + \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta u_i'(t, x) \frac{\partial^2 H_i'(t, x, u_i(t, x), \psi_i(t, x))}{\partial u_i^2} \Delta u_i(t, x) + o_{i+4}(\|\Delta u_i(t, x)\|^2), \quad i=1,2.$$

Учитывая введенные обозначения и разложения (15)-(17) формула (14) для приращения функционала качества (6) представляется в виде

$$J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) = \frac{\partial \varphi_1'(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1} \Delta z_1(t_1, x_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \Delta z_1(t_1, x_1) + o_1(\|\Delta z_1(t_1, x_1)\|^2) +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta z_2'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2'(z_2(t_1, x_1))}{\partial z_2^2} \Delta z_2(t_2, x_1) + o_2(\|\Delta z_2(t_1, x_1)\|^2) +$$

$$+ \frac{\partial N'(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1} \Delta z_1(t_1, x_1) + \frac{1}{2} \Delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \Delta z_1(t_1, x_1) +$$

$$+ o_4(\|\Delta z_1(t_1, x_1)\|^2) - \int_t^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial M'(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1} \Delta z_1(t, x) dx dt -$$

$$- \int_t^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_3(\|\Delta z_1(t, x)\|^2) dx dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z_1'(t_1, x) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1^2} \Delta z_1(t_1, x) dx dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \psi_1'(t_1, x_1) \Delta z_1(t_1, x_1) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \psi_1'(t, x_1)}{\partial t} \Delta z_1(t, x_1) dt - \\
& - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \psi_1'(t_1, x)}{\partial x} \Delta z_1(t_1, x) dx + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 \psi_1'(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta z_1(t, x) dx dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{\tau}^{t_1} \int_x^{x_1} \psi_1'(\tau, s) A_1(\tau, s, t, x) ds d\tau \right] \Delta z_1(t, x) dx dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_1'(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1} \Delta u_1(t, x) dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta u_1'(t, x) \frac{\partial^2 H_1(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1^2} \Delta u_1(t, x) dx dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_5 \left(\|\Delta u_1(t, x)\|^2 \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \psi_2'(t, x) \Delta z_2(t, x) dx dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{\tau}^{t_2} \int_x^{x_1} \psi_2'(\tau, s) A_2(\tau, s, t, x) ds d\tau \right] \Delta z_2(t, x) dx dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_2'(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2} \Delta u_2(t, x) dx dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta u_2'(t, x) \frac{\partial^2 H_2(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2^2} \Delta u_2(t, x) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_6 \left(\|\Delta u_2(t, x)\|^2 \right) dx dt.
\end{aligned} \tag{18}$$

Предположим, что вектор-функции $\psi_i(t, x), i=1,2$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi_1(t, x)}{\partial t \partial x} &= \int_{\tau}^{t_1} \int_x^{x_1} A_1(\tau, s, t, x) \psi_1(\tau, s) ds d\tau, \\
\frac{\partial \psi_1(t_1, x)}{\partial x} &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1} dt,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_1(t, x_1)}{\partial t} &= 0, \\
\psi_1(t_1, x_1) &= - \frac{\partial \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1} - \frac{\partial N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1},
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\psi_2(t, x) = - \frac{\partial \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2} A_2(t_2, x_1, t, x) + \int_{\tau}^{t_2} \int_x^{x_1} A_2(\tau, s, t, x) \psi_2(\tau, s) ds d\tau. \tag{21}$$

Краевую задачу (19)-(20) и интегральное уравнение (21) назовем сопряженной системой для рассматриваемой задачи.

При выполнении соотношений (19)-(20) формула приращения (18) примет вид

$$\begin{aligned}
J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) = & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_1'(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1} \Delta u_1(t, x) dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta u_1'(t, x) \frac{\partial^2 H_1(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1^2} \Delta u_1(t, x) dx dt + \\
& + \frac{1}{2} \Delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \Delta z_1(t_1, x_1) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \Delta z_1(t_1, x_1) - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z_1'(t_1, x) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1^2} \Delta z_1(t_1, x) dx dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_2'(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2} \Delta u_2(t, x) dx dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta u_2'(t, x) \frac{\partial^2 H_2(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2^2} \Delta u_2(t, x) dx dt + \\
& + o_1(\|\Delta z_1(t_1, x_1)\|^2) + o_2(\|\Delta z_2(t_1, x_1)\|^2) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta z_2'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} \Delta z_2(t_2, x_1) - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_3(\|\Delta z_1(t, x)\|^2) dx dt + o_4(\|\Delta z_1(t_1, x_1)\|^2) - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_5(\|\Delta u_1(t, x)\|^2) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_6(\|\Delta u_2(t, x)\|^2) dx dt. \tag{22}
\end{aligned}$$

Предположим, что $\Delta u_2(t, x) \equiv 0$. Тогда из соотношений (7), (8) следует, что

$$\begin{aligned}
\Delta z_1(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s A_1(\tau, s, \alpha, \beta) \Delta z_1(\alpha, \beta) d\alpha d\beta ds d\tau + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s [f_1(\tau, s, \alpha, \beta, \bar{u}_1(\alpha, \beta)) - f_1(\tau, s, \alpha, \beta, u_1(\alpha, \beta))] d\alpha d\beta ds d\tau = \\
= & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s A_1(\alpha, \beta, \tau, s) d\alpha d\beta \Delta z_1(\tau, s) ds d\tau + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s [f_1(\alpha, \beta, \tau, s, \bar{u}_1(\tau, s)) - f_1(\alpha, \beta, \tau, s, u_1(\tau, s))] d\alpha d\beta ds d\tau.
\end{aligned}$$

В этом тождестве переходя к норме и учитывая условие Липшица, получаем, что

$$\|\Delta z_1(t, x)\| \leq L_1 \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|\Delta z_1(\tau, s)\| + \|\Delta u_1(\tau, s)\| ds d\tau, \tag{23}$$

где $L_1 = \text{const} > 0$ – некоторая постоянная.

А из тождества (9) при $\Delta u_2(t, x) = 0$ получаем, что

$$\|\Delta z_2(t, x)\| \leq L_2 \left[\int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|\Delta z_2(\tau, s)\| ds d\tau + \|\Delta z_1(t_1, x)\| \right], \quad (24)$$

где $L_2 = const > 0$ – некоторая постоянная.

Из неравенства (23) на основе леммы Гронуолла-Вендроффа (см., например, [7]) приходим к оценке

$$\|\Delta z_1(t, x)\| \leq L_3 \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|\Delta u_1(\tau, s)\| ds d\tau, \quad (t, x) \in D_1, \quad (25)$$

($L_3 = const > 0$).

А из неравенства (24) учитывая оценку (25) получаем, что

$$\|\Delta z_2(t, x)\| \leq L_4 \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|\Delta u_1(\tau, s)\| ds d\tau, \quad (t, x) \in D_2. \quad (26)$$

($L_4 = const > 0$).

Если предположить, что $\Delta u_1(t, x) \equiv 0$, То из соотношений (7), (9) получим, что $\Delta z_1(t, x) = 0$, а

$$\Delta z_2(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[A_2(t, x, \tau, s) \Delta z_2(\tau, s) + \frac{\partial f_2(t, x, \tau, s, u_2(\tau, s))}{\partial u_2} \Delta u_2(\tau, s) \right] ds d\tau. \quad (27)$$

А из последнего соотношения, применяя лемму Гронуолла-Вендроффа приходим к оценке

$$\|\Delta z_2(t, x)\| \leq L_5 \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \|\Delta u_2(\tau, s)\| ds d\tau, \quad (t, x) \in D_2, \quad (28)$$

где $L_5 = const > 0$ – некоторая постоянная.

Установленные оценки (25), (26), (28) позволяют вычислить первое и второе вариации функционала качества.

Пусть ε произвольное, достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_1(t, x) \in R^r, (t, x) \in D$ – произвольная измеримая и ограниченная r -мерная вектор-функция. Тогда в силу открытости областей управления $U_i, i=1,2$ специальное приращение допустимого управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ можем определить по формуле

$$\begin{aligned} \Delta u_1(t, x; \varepsilon) &= \varepsilon \delta u_1(t, x), \quad (t, x) \in D_1, \\ \Delta u_2(t, x; \varepsilon) &= 0, \quad (t, x) \in D_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Через $(\Delta z_1(t, x; \varepsilon), \Delta z_2(t, x; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(z_1(t, x), z_2(t, x))$, отвечающее приращению (29) управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$.

Учитывая оценки (25), (26), с помощью формул (7), (9) доказыва-
ется

Лемма 1. Для $\Delta z_1(t, x; \varepsilon)$ и $\Delta z_2(t, x; \varepsilon)$ имеют место разложения

$$\Delta z_1(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta z_1(t, x) + o(t, x; \varepsilon), \quad (30)$$

$$\Delta z_2(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta z_2(t, x) + o(t, x; \varepsilon). \quad (31)$$

Здесь $\delta z_1(t, x)$ и $\delta z_2(t, x)$ являются решениями следующих уравнений соответственно

$$\frac{\partial^2 \delta z_1(t, x)}{\partial t \partial x} = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[A_1(t, x, \tau, s) \delta z_1(\tau, s) + \frac{\partial f_1(t, x, \tau, s, u_1(\tau, s))}{\partial u_1} \delta u_1(\tau, s) \right] ds d\tau, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \delta z_1(t_0, x) &= 0, \\ \delta z_1(t, x_0) &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\delta z_2(t, x) = \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x A_2(t, x, \tau, s) \delta z_2(\tau, s) ds d\tau + \frac{\partial G(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1} \delta z_1(t_1, x). \quad (34)$$

Краевую задачу (32)-(33) и уравнение (34), следуя классической терминологии, (см. напр., [8]) назовем уравнениями в вариациях.

Теперь специальное приращение допустимого управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_1(t, x; \mu) = 0, \\ \Delta u_2(t, x; \mu) = \mu \delta u_2(t, x). \end{cases} \quad (35)$$

Здесь μ произвольное достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_2(t, x) \in R^q, (t, x) \in D$ – произвольная измеримая и ограниченная q -мерная вектор-функция.

Через $(\Delta z_1(t, x; \mu), \Delta z_2(t, x; \mu))$ обозначим специальное приращение состояния $(z_1(t, x), z_2(t, x))$, отвечающее приращению (35) управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$.

Ясно, что при этом $\Delta z_1(t, x; \mu) = 0$. Из оценки (28) следует, что

$$\|\Delta z_2(t, x; \mu)\| \leq L\mu, (t, x) \in D_2. \quad (36)$$

Имеет место

Лемма 2. Для $\Delta z_2(t, x; \mu)$ справедливо разложение

$$\Delta z_2(t, x; \mu) = \mu l(t, x) + o_7(t, x; \mu) \quad (37)$$

Здесь $l(t, x)$ является решением следующего линейного интегрального уравнения

$$l(t, x) = \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \left[A_2(t, x, \tau, s) l(\tau, s) + \frac{\partial f_2(t, x, \tau, s, u_2(\tau, s))}{\partial u_2} \delta u_2(\tau, s) \right] ds d\tau. \quad (38)$$

Учитывая леммы 1 и 2, оценки (25), (26), (28), а также формулы (29), (35) из формулы приращения функционала (6) получаем справедливость разложений

$$\begin{aligned}
J(u_1 + \varepsilon \delta u_1, u_2) - J(u_1, u_2) = & -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_1'(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1} \delta u_1(t, x) dx dt - \\
& - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u_1'(t, x) \frac{\partial^2 H_1'(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t, x) dx dt + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \delta z_1(t_1, x_1) - \\
& - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \delta z_1'(t_1, x) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1^2} \delta z_1(t_1, x) dx dt + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \delta z_1(t_1, x_1) + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta z_2'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} \delta z_2(t_2, x_1) + o(\varepsilon^2), \tag{39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(u_1, u_2 + \mu \delta u_2) - J(u_1, u_2) = & \\
= & -\mu^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H_2'(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2} \delta u_2(t, x) dx dt + \\
& + \frac{\mu^2}{2} l'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} l(t_2, x_1) - \\
& - \frac{\mu^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \delta u_2'(t, x) \frac{\partial^2 H_2(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t, x) dx dt + o(\mu^2). \tag{40}
\end{aligned}$$

Из разложений (39) и (40) следует, что первая, и вторая вариации функционала имеют соответственно следующий вид:

$$\delta^1 J(u_1, u_2; \delta u_1) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_1'(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1} \delta u_1(t, x) dx dt, \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 J(u_1, u_2; \delta u_1) = & \delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \delta z_1(t_1, x_1) + \\
& \delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \delta z_1(t_1, x_1) + \delta z_2'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} \delta z_2(t_2, x_1) - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u_1'(t, x) \frac{\partial^2 H_1(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t, x) dx dt - \\
& - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \delta z_1'(t_1, x) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1^2} \delta z_1(t_1, x) dx dt, \tag{42}
\end{aligned}$$

$$\delta^1 J(u_1, u_2; \delta u_2) = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H_2'(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2} \delta u_2(t, x) dx dt, \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 J(u_1, u_2; \delta u_2) = & l'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} l(t_2, x_1) - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \delta u_2'(t, x) \frac{\partial^2 H_2(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t, x) dx dt. \tag{44}
\end{aligned}$$

Вычисленные вариации (41)-(44) функционала (6) позволяют получить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

4. Необходимые условия оптимальности. Предположим, что $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ является оптимальным управлением. Тогда на основе основного результата классического вариационного исчисления (см., например, [8, 9]) получаем, что для всех $\delta u_1(t, x)$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_1'(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1} \delta u_1(t, x) dx dt = 0, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \delta z_1(t_1, x_1) + \\ & + \delta z_1'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \delta z_1(t_1, x_1) + \delta z_2'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} \delta z_2(t_2, x_1) - \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u_1'(t, x) \frac{\partial^2 H_1(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t, x) dx dt - \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \delta z_1'(t_1, x) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1^2} \delta z_1(t_1, x) dx dt \geq 0, \end{aligned} \quad (46)$$

а для всех допустимых вариаций $\delta u_2(t, x)$ управляющей функции $u_2(t, x)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_2'(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2} \delta u_2(t, x) dx dt = 0, \quad (47)$$

$$l'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} l(t_2, x_1) - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \delta u_2'(t, x) \frac{\partial^2 H_2(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t, x) dx dt \geq 0. \quad (48)$$

Как видно, неравенства (45) и (47) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого порядка, а неравенства (46) и (48) являются неявными необходимыми условиями оптимальности второго порядка.

Учитывая произвольность допустимой вариации $(\delta u_1(t, x), \delta u_2(t, x))$ управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ и используя формулы (45) и (47), по схеме, например, из [10], доказывается

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\frac{\partial H_1(\theta, \xi, u_1(\theta, \xi), \psi_1(\theta, \xi))}{\partial u_1} = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial H_2(\theta, \xi, u_2(\theta, \xi), \psi_2(\theta, \xi))}{\partial u_2} = 0 \quad (50)$$

выполнялось для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ и $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, x_1]$ соответственно.

Здесь $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ и $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, x_1]$ произвольные точки Лебега (см., например, [7]) управляющих функций $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$.

Соотношения (49) и (50) следуя например, [8] назовем аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

Каждое допустимое управление $(u_1(t, x), u_2(t, x))$, являющееся решением уравнения Эйлера назовем классической экстремалью.

Для «сужения» множества классических экстремалей с помощью неравенств (46) и (48) получим необходимые условия оптимальности, выраженные через параметры рассматриваемой задачи.

Решение краевой задачи (32)-(33) допускает представление

$$\delta x_1(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [Q_1(t, x, \tau, s) \delta u_1(\tau, s)] ds d\tau. \quad (51)$$

Здесь

$$Q_1(t, x, \tau, s) = \int_{\tau}^t \int_{s}^x R_1(t, x, \alpha, \beta) \frac{\partial f_1(\alpha, \beta, \tau, s, u_1(\tau, s))}{\partial u_1} d\alpha d\beta,$$

где $R_1(t, x, \tau, s) - (n \times n)$ матричная функция, являющаяся решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_1(t, x, \tau, s)}{\partial \tau \partial s} &= \int_{\tau}^t \int_{s}^x R_1(t, x, \alpha, \beta) A_1(\alpha, \beta, \tau, s) d\alpha d\beta, \\ \frac{\partial R_1(t, x, \tau, s)}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial R_1(t, x, \tau, x)}{\partial \tau} &= 0, \\ R_1(t, x, t, x) &= E \end{aligned}$$

($E - (n \times n)$ единичная матрица).

Далее, положим

$$\begin{aligned} Q_2(t, x, \tau, s) &= \int_{\tau}^t \int_{s}^x R_2(t, x, \alpha, \beta) \frac{\partial G_1(z_1(t_1, \beta))}{\partial z_1} Q_1(t_1, \beta, \tau, s) d\alpha d\beta + \\ &+ \frac{\partial G_1(z_1(t_1, x))}{\partial z_1} Q_1(t_1, x, \tau, s), \end{aligned}$$

где $R_2(t, x, \tau, s) - (n \times n)$ матричная функция – решение уравнения

$$R_2(t, x, \tau, s) = \int_{\tau}^t \int_{s}^x A_2(t, x, \alpha, \beta) R_2(\alpha, \beta, t, x) d\alpha d\beta + A_2(t, x, \tau, s). \quad (52)$$

Решение уравнения (34), на основе формулы о представлении решений линейных интегральных уравнений типа Вольтерра (см., например, [5]) допускает представление

$$\delta x_2(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x, \tau, s) \delta u_1(\tau, s) ds d\tau, \quad (53)$$

а решение интегрального уравнения (38) допускает представление

$$I(t, x) = \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x Q_3(t, x, \tau, s) \delta u_2(\tau, s) ds d\tau. \quad (54)$$

Здесь

$$Q_3(t, x, \tau, s) = \frac{\partial f_2(t, x, \tau, s, u_2(\tau, s))}{\partial u_2} + \int_{\tau}^t \int_{s}^x R_2(t, x, \alpha, \beta) \frac{\partial f_2(\alpha, \beta, \tau, s, u_2(\tau, s))}{\partial u_2} ds d\tau, \quad (55)$$

где $R_2(t, x, \tau, s)$ – $(n \times n)$ матричная функция – решение уравнения (52).

Используя представления (51), (53), (54) займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенствах (46), (48).

Имеем

$$\begin{aligned} & \delta_{z_1}'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \delta_{z_1}(t_1, x_1) = \\ & = \int_{D_1} \int_{D_1} \delta u_1'(\tau, s) Q_1'(t_1, x_1, \tau, s) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} Q_1(t_1, x_1, \alpha, \beta) \delta u_1(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{z_1}''(t_1, x_1) \frac{\partial^2 N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} \delta_{z_1}(t_1, x_1) = \\ & = \int_{D_1} \int_{D_1} \delta u_1'(\tau, s) Q_1'(t_1, x_1, \tau, s) \frac{\partial^2 N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} Q_1(t_1, x_1, \alpha, \beta) \delta u_1(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \delta_{z_1}'(t_1, x) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t, x), z_1(t_1, x))}{\partial z_1^2} \delta_{z_1}(t_1, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{\max(s, \beta)} \delta u_1'(\tau, s) Q_1'(t_1, x, \tau, s) \times \\ & \times \left. \frac{\partial^2 M(z_1(t_1, x))}{\partial z_1^2} Q_1(t_1, x, \alpha, \beta) \right] \delta u_1(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{z_2}'(t_2, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} \delta_{z_2}(t_2, x_1) = \\ & = \int_{D_2} \int_{D_2} \delta u_2'(\tau, s) Q_2'(t_2, x_1, \tau, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} \times \\ & \times Q_2(t_2, x_1, \alpha, \beta) \delta u_2(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & l'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} l(t_2, x_1) = \\ & = \int_{D_2} \int_{D_2} \delta u_2'(\tau, s) Q_3'(t_2, x_1, \tau, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} \times \\ & \times Q_3(t_2, x_1, \alpha, \beta) \delta u_2(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (60)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
K_1(\tau, s, \alpha, \beta) &= -Q_1'(t_1, x_1, \tau, s) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} Q_1(t_1, x_1, \alpha, \beta) - \\
&- Q_1'(t_1, x_1, \tau, s) \frac{\partial^2 N(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} Q_1(t_1, x_1, \alpha, \beta) - \\
&- \int_{t_1}^{\tau} \int_{x_1}^{x_2} Q_1'(t_1, x, \tau, s) \frac{\partial^2 M(z_1(t_1, x_1))}{\partial z_1^2} Q_1(t_1, x, \alpha, \beta) dx dt - \\
&- Q_2'(t_2, x_1, \tau, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} Q_2(t_2, x_1, \alpha, \beta), \\
K_2(\tau, s, \alpha, \beta) &= Q_3'(t_2, x_1, \tau, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, x_1))}{\partial z_2^2} Q_3(t_2, x_1, \alpha, \beta).
\end{aligned}$$

Принимая во внимания в неравенствах (46), (48), доказанные тождества (58)-(60) получаем, что

$$\begin{aligned}
&\int \int_{D_1} \delta u_1'(\tau, s) K_1(\tau, s, \alpha, \beta) \delta u_1(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta + \\
&+ \int_{D_1} \delta u_1'(t, x) \frac{\partial^2 H_1'(t, x, u_1(t, x), \psi_1(t, x))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t, x) \leq 0, \quad (61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \int_{D_2} \delta u_2'(\tau, s) K_2(\tau, s, \alpha, \beta) \delta u_2(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta + \\
&+ \int_{D_2} \delta u_2'(t, x) \frac{\partial^2 H_2'(t, x, u_2(t, x), \psi_2(t, x))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t, x) \leq 0. \quad (62)
\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ необходимо, чтобы неравенства (61) и (62) выполнялись для всех $\delta u_1(t, x) \in R^r, (t, x) \in D_1$ и $\delta u_2(t, x) \in R^q, (t, x) \in D_2$ соответственно.

Заметим, что используя произвольность допустимых вариаций $(\delta u_1(t, x), \delta u_2(t, x))$ управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ из неравенств (61) и (62) можно получить относительно легко проверяемые условия оптимальности.

Приведем одну из них.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ необходимо, чтобы неравенства

$$v_1' \frac{\partial^2 H_1'(\theta, \xi, u_1(\theta, \xi), \psi_1(\theta, \xi))}{\partial u_1^2} v_1 \leq 0, \quad (63)$$

$$v_2' \frac{\partial^2 H_2'(\theta, \xi, u_2(\theta, \xi), \psi_2(\theta, \xi))}{\partial u_2^2} v_2 \leq 0 \quad (64)$$

выполнялось для всех $v_1 \in R^r, (\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ и $v_2 \in R^q, (\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольterra В. Математическая теория борьбы за существования. – Москва: Наука, - 1976, - 286 с.
2. Тертычный-Даури В.С. Интегральные и интегро-дифференциальные объекты управления: Условия оптимальности. Автоматика и телемеханика, - 2008, - №10, - с. 45-74.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – Москва: Высшая школа, - 1985, - 301 с.
4. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольterra. – Баку: Элм, - 2013, - 224 с.
5. Мансимов К.Б., Абдуллаев А.А. Исследование особых управлений в одной задаче управления двумерными интегральными уравнениями типа Вольterra // Автоматика и вычислительная техника, - 2005, - №3, - с. 72-81.
6. Carlson D.A. Elementary proof of the maximum principle for optimal control problem governed by Volterra integral equations // Jour. of Optimiz. theory and Appl. 1987, vol. 54, №16 pp. 32-45.
7. Новоженев М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. – Горький: ГГУ, - 1986, - 87 с.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – Москва: Либроком, - 2011, - 256 с.
9. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. – Москва: Высшая школа, - 2005, - 335 с.
10. Mansimov K.B. Qursa-Darbu sistemləri ilə optimal idarəetmə məsələsi. – Bakı: BDU, - 1998, - 112 с.

ДӘЙİŞӘН СТРУКТУРЛУ ПАЙЛАНМИШ ПАРАМЕТРЛІ БİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN BİRİNCİ VƏ İKİNCİ TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

K.B.MƏNSİMOV, V.G.RZAYEVA

XÜLASƏ

İşdə müxtəlif idarə oblastlarında Volterra tip hiperbolik inteqro-diferensial tənliklər sistemi və ikiölçülü Volterra inteqral tənlikləri ilə təsvir edilən dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsi nəzərdən keçirilir.

İdarə oblastlarının açıq olduğu halda optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: ikiölçülü Volterra tipli inteqral tənlik, hiperbolik inteqro-diferensial tənlik, funksionalın variasiyası, Eyer tənliyinin analoqu, Lejandr-Klebş şərtinin analoqu, klassik ekstremal, optimallıq üçün zəruri şərt.

**NECESSARY CONDITIONS FOR THE OPTIMALITY OF THE FIRST AND
SECOND ORDERS IN THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM
WITH VARIABLE STRUCTURE AND DISTRIBUTED PARAMETERS**

K.B.MANSIMOV, V.G.RZAYEVA

SUMMARY

The paper considered the problem of optimal control with a variable structure described in various fields by a set of hyperbolic integro-differential equations of the Volterra type and two-dimensional Volterra integral equations of Volterra type.

In the case on openness of the control domains, the necessary conditions for optimality of the first and second orders are established.

Keywords: two-dimensional integral equation of the Volterra type, the hyperbolic integro-differential equation, is a variation of the functional, analog of the Euler equation, analog of the Legendre-Clebsch condition, classical extremal, the necessary optimality condition.

MEXANİKA

UDC 622.276.58:519.2

CALCULATION OF THE STRENGTH OF THE MAGNETIC FIELD OF TREATMENT OF THE PUMPED WATER INTO THE FORMATION TO OBTAIN THE MAXIMUM OIL PRODUCTION

A.M.MAMED-ZADE¹, H.Kh.MALIKOV¹, E.N.ALIYEV¹,
R.E.MUSTAFAYEVA², T.H.MALIKOV¹*1-Scientific-Research Institute**"Geotechnological Problems of Oil, Gas and Chemistry"**2-"University of Oil and Industry"**rena-babaeva0@rambler.ru*

The article follows the mathematical problem of the flow of a viscous fluid in a porous medium, taking into account the action of magnetic forces, which are described by Maxwell's equations. The applicability of the considered model of the mathematical model for the study of a viscous fluid in a porous research laboratory was carried out by calculating the results with the results of laboratory studies. It has been established that the release of transformer oil from a porous water medium treated with a magnetic field of hardness $H = 51,740$ A/m is 87.5%. Such a conclusion can be considered reliable. The proposed mathematical model makes it possible to obtain the final oil recovery factor, which makes it possible to calculate mineral reserves with reliability.

Keywords: magnetic field, electro-kinetic processes, oil production, mathematical model, the strength, Maxwell's equations

Introduction. Determination of the maximum value of recoverable oil at the stage of field development design, which is one of the important problem of oil production, is devoted to a number of works [1 - 3, etc.].

All these studies, with rare exceptions, were carried out without taking into account the influence of electro-kinetic processes arising as a result of liquid filtration and affecting the flow characteristics. In addition, in recent years, successful laboratory and field studies have been carried out on the injection of magnetized fluids in order to increase oil production [4-6]. The use of existing mathematical models for the processes of filtration and displacement of oil from the porous medium of reservoirs, gives a significant discrepancy with the results of experiments due to not taking into

account electro-kinetic processes. The article deals with the mathematical problem of the flow of a viscous fluid in a porous medium, taking into account the action of magnetic forces, which are described by Maxwell's equations. A mathematical description of the process of oil displacement by magnetized water can be realized by applying the Navier-Stokes equation for the flow of a fluid and Maxwell's equations describing electrokinetic processes in the following way. However, in contact with the surface of the porous medium, an electrical double (adsorption) layer appears, which an electrical-conductive system. In this case, oil is an electrically conductive liquid. Double electrical layer, depending on the composition of the rock, oil, filtration rate and many other factors, has a certain electrical capacity. During the filtration process, an excess of electric potential arises that, in the form of a magnetic field, is radiated by a double electric layer and acts on the flow characteristics of the filtration flow, sometimes making significant changes. In this case, we can apply the model proposed above for the flow of a liquid in a porous medium.

Statement of the Problem. We solve the following mathematical problem. We shall assume that the velocity of the flow of the liquid V along the ox axis, the external electric field E_o , and the external magnetic field H_o do not change and perpendicularly along the streamline. In this case all the flow parameters depend only on the coordinate oy , in addition to the pressure varying along the axis ox . Following, we write the system of equations for the given case in the form:

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{V} + \frac{\mu_o}{\rho}(\vec{j} \times \vec{H}) \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad (4)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (5)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad (6)$$

$$\vec{j} = \sigma[\vec{E} + \mu_o(\vec{V} \times \vec{H})] \quad (7)$$

In this system, unknowns: \vec{V} ; p ; \vec{H} ; \vec{E} ; \vec{j} .

In this formulation: $V_z = V_y = 0$, from the continuity equation:

$$\dot{V}_x = V_x(y) = U(y).$$

(Equation 4) in this case means that the component of the vector along the axis oy is constant and equal to H_o , that is, $H_y = \text{const} = H_o$.

From the (Equation 6) follows $\text{div } \vec{j} = 0$ and this means that the component of the vector the current density along the oy axis is constant, it must be zero, since the lower and upper walls are isolated ($j_y = \text{const} = 0$).

Taking into account these relations, the equation of an incompressible fluid (Equation 1) in the projection onto the ox axis can be written in

the form:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{d^2 U}{dy^2} - j_z B_o, \quad (8)$$

where: j_z - is the component of the current density vector in the direction oz ;

U - is the velocity of the fluid in the channel

The equation of momentum in the projection on Oz gives $j_x = 0$. The projection of this equation on the Oy axis takes the form:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = j_x B_x \quad (9)$$

Projecting on the coordinate axes (Equation 7), we obtain that the current density components along the axes Oy and Ox are equal to zero, the component on the axis Oz is defined as follows:

$$j_z = \sigma [E_o + UB_o] \quad (10)$$

where: E_o is the constant component of the electric field strength along axis Oz , determined from the conditions at the flow boundaries. Combining (Equation 8) and (Equation 10), we obtain the following differential equation for $U(y)$:

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - k^2 U = \frac{\sigma}{\mu} B_o E_o + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \text{where: } k^2 = \frac{\sigma B_o^2}{\mu} \quad (11)$$

The solution of this equation under the boundary conditions $U = 0$ for $y = \pm \frac{\alpha}{2}$ and the assumption that , $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$ has the form:

$$U = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} + \sigma E_o B_o}{\sigma B_o^2} \left[\frac{ch \frac{y}{a} Ha}{ch Ha} - 1 \right], \quad (12)$$

where: $\frac{\alpha}{2}$ is the channel half-width; $Ha = B_o \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \alpha$ is the Hartmann number.

If E_o is set equal to zero, then the expression for velocity is obtained in the form:

$$U = \frac{1}{\sigma B_o^2} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{ch \frac{y}{a} Ha}{ch Ha} - 1 \right], \quad (13)$$

We denote the velocity on the channel axis $U_{y=0} = U_o$, we obtain:

$$U = U_o \frac{ch Ha - ch \frac{y}{a} Ha}{ch Ha - 1} \quad (14)$$

When $Ha \ll 1$, that is, when the viscous forces are much greater than the electromagnetic forces, (Equation 14) is reduced to the form:

$$U = U_o \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \quad (15)$$

It is known that oil samples taken even from the same well with a small interval of time have different physicochemical properties. To check any provisions and for calculations, parameter values that are not variable are needed. Based on this, in our experiments we used a certain fraction of oil, which is used in transformers of an electrical substation and is called "transformer oil", has constant physicochemical parameters. Plotting both profiles on the same scale shows the intersection point of the curves. The area in which the velocity of the displacing fluid (water) is greater than the

velocity of the saturated oil was considered mobile; therefore, this part of the oil was recovered from the formation.

Considering that the mathematical model was applied for a system of parallel, through capillaries and an individual oil fraction, conditions that differ from the real porous medium and oil, such a result can be considered satisfactory. The movable volume of transformer oil is 71% of the total volume. Laboratory studies show that the displacement of transformer oil from a porous medium by water treated with a magnetic field of strength $H = 64\ 476\ \text{A/m}$ is 60%. This agreement of the results can be considered satisfactory. The movable volume of transformer oil is 91% of the saturated volume. Laboratory studies show that the displacement of transformer oil from a porous medium by water treated with a magnetic field of strength $H = 51\ 740\ \text{A/m}$ is 87.5%. This agreement of the results can be considered satisfactory.

Conclusion and recommendations:

1. The proposed mathematical model makes it possible to obtain the final oil recovery factor by a relatively simple method, which makes it possible to calculate the reserves of the field with satisfactory reliability.
2. This method allows you to select the strength of the magnetic field for maximum oil recovery during the operation of the field.

REFERENCES

1. Musket M.F. The flow of a homogeneous liquid through a porous medium. No. 4 1937, 922 p.
2. Leibenzon L.S. Collection of works. T. 2. Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1955, 439 p.
3. Mirzajanzade A.H., Mamed – Zade A.M. «Effect of clay mineral on fluid filtration in a porous mediym», Lithas, 24 (1990) p. 251–260, Elsevier Science, Amsterdam, Printed in Netherlands.
4. Mamed-Zade A.M. Nanotechnology in oil production. Baku, 2010, 268 p.
5. Mamed-Zade A.M., Mustafayeva R.E. Investigation of the extraction process of high-pressure oil by magnetic elastomers. Actual problems of modern natural and Economic Sciences. International scientific conference. Ganja 2022 part I p. 373-375
6. Mamed-Zade A.M., H.Kh.Malikov, E.N.Aliyev, Mustafayeva R.E. Experimental study of the effect of magnetically sensitive elastomers on oil recovery of reservoirs containing high-viscosity oils. Integration of science and education in oil and Gas universities-2022. Advanced technologies and modern trends Materials of the International Scientific and Methodological Conference. Publishing House of USNTU, Ufa, 2022, p.137-139

NEFTİN İSTEHSALININ MAKSİMUM ARTIRILMASI ÜÇÜN LAYA EMAL EDİLMİŞ SUYUN MAQNİT SAHƏSİNİN GƏRGİNLİYİNİN HESABLANMASI

A.M.MƏMMƏDZADƏ, H.X.MƏLİKOV, E.N.ƏLİYEV,
R.E.MUSTAFAJEVA, T.H.MƏLİKOV

XÜLASƏ

Məqalədə Maksvell tənlikləri ilə təsvir edilən maqnit qüvvələrinin hərəkəti nəzərə alınmaqla, məsaməli mühitdə özlü mayenin axınının riyazi problemindən bəhs edilir. Nəzərə alınan riyazi modelin məsaməli mühitdə özlü mayenin axını üçün tətbiqi, hesablama nəticələrinin özlü yağın maqnitlənmiş su ilə sıxışdırılıb çıxarılması laboratoriya tədqiqatlarının nəticələri ilə müqayisə edilərək qiymətləndirilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, gərginliyi $H = 51,740$ A/m olan sabit eninə maqnit sahəsi ilə emal edilmiş su ilə yağın məsaməli mühitdən sıxışdırılıb çıxarılması 87,5% təşkil edir. Alınmış nəticələri qənaətbəxş hesab etmək olar. Təklif olunan riyazi model nisbətən sadə üsulla son neftvermə əmsalını əldə etməyə imkan verir ki, bu da neft yatağının ehtiyatlarını qənaətbəxş etibarlılıqla hesablamağa imkan verir.

Açar sözlər: maqnit sahəsi, elektrokinetik proseslər, neft hasilatı, riyazi model, intensivlik, Maksvell tənlikləri.

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ОБРАБОТКИ ЗАКАЧИВАЕМОЙ ВОДЫ В ПЛАСТ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ДОБЫЧИ НЕФТИ

A.M.MAMEDZADE, H.X.MALIKOV, E.N.ALIEV,
R.E.MUSTAFAJEVA, T.H.MALIKOV

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается математическая задача течения вязкой жидкости в пористой среде с учетом действия магнитных сил, которые описываются уравнениями Максвелла. Применимость рассматриваемой математической модели для течения вязкой жидкости в пористой среде оценивалась путем сравнения результатов расчета с результатами лабораторных исследований вытеснения вязкого масла намагниченной водой. Установлено, что вытеснение трансформаторного масла из пористой среды водой, обработанной магнитным полем напряженностью $H = 51\ 740$ А/м составляет 87,5%. Такое соответствие результатов можно считать удовлетворительным. Предложенная математическая модель позволяет относительно простым методом получить конечный коэффициент нефтеотдачи, что позволяет рассчитывать запасы месторождения с удовлетворительной надежностью.

Ключевые слова: магнитное поле, электрокинетические процессы, добыча нефти, математическая модель, напряженность, уравнения Максвелла.

İNFORMATİKA**UDK 62****AZƏRBAYCAN DİLİNDƏKİ MƏTNLƏRİN MÜƏLLİFLƏRİNİN
TANINMASI ÜÇÜN N-QRAM METODU****L.M.HƏSƏNOVA***Bakı Dövlət Universiteti**Lamantry@gmail.com*

Məqalədə mətnin formal təhlili yolu ilə mətnin müəllifliyini müəyyən etmək problemini həll etmək məqsədi ilə yeni metod N-qramın icrası kimi mətnin hərflərinin ardıcılığının formal riyazi modelinə əsaslanır.

Açar sözlər: müəlliflərin tanınması, n-qram, əlamətlər, kvadratik norma, testlər.

Kompüter texnikasının inkişafı ilə əlaqədar olaraq rəqəmsal şəkildə verilən informasiyanın o cümlədən mətn tipli informasiyanın həcmi sürətlə artır. Belə mətn informasiyanın əsas hissəsi təbii dildə yazıldığından onların avtomatik təhlili məsələsi get-gedə aktual olur. Belə məsələnin ən mühümlərindən biri mətnlərin atribusiyası (müəlliflərin tanınması) müəllifin identifikasiyası məsələsidir.

Əvvəllər mətnlərin tanınması ənənəvi üsullarla həyata keçirilirdi. Bu əsasən əlyazmanın müəyyən əlamətlərinə görə həyata keçirilir. Son zamanlar mətnlərin kompüterdə yığılması ilə əlaqədar olaraq standart çap formasında verilmiş mətn sənədlərinin avtomatik təhlil edilməsi daha mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Qeyd etmək lazımdır ki, mətnlərin müəlliflərinin tanınması məsələləri ilə keçən əsrin əvvəllərindən məşğul olmağa başlamışlar. Əvvəllər belə məsələlərin həlli seçilmiş açar sözlərdən istifadə etməklə həyata keçirilirdi. Bu istiqamətdə ilk addım N.A.Morazov tərəfindən atılmışdır [1].

Bu metodu qəbul etməyən A.A.Markov hələ ondan əvvəl özünün təklif etdiyi statistik paylanma dərəcələrini tədqiq etmişdir [2].

Bundan sonra mətnin müəllifinin müəyyən olunması məsələsi müxtəlif tədqiqatçılar tərəfindən araşdırılmışdır. Bu araşdırmaların tarixi [3]

kitabında geniş şərh olunmuşdur. Qeyd etmək lazımdır ki, hər hansı bir mətnin müəllifinin statistik metodlarla müəyyən edilməsi təkcə ədəbiyyatşünasların deyil həm də kompüter elmləri məşğul olan riyaziyyatçıların da diqqət mərkəzində olmuşdur. Belə ki, bu problemin avtomatlaşdırılması ilə keçən əsrin 70-ci illərindən başlayaraq daha intensiv məşğul olmağa başlamışlar. Bununla əlaqədar olaraq son zamanlar mətn tipli informasiyanın kəmiyyət xarakterli metodlarla təhlilinə maraq xeyli armışdır. Bu metodlar əsasında mətnin insan tərəfindən nəzarət edilməsi çətin olan xüsusiyyətlər əsasında təhlil aparılır ki, bu da bütün müəlliflər üçün eyni dərəcədə xarakterikdir. Bununla birlikdə mətnin hansı xüsusiyyətlərinin daha yaxşı nəticə verdiyi haqqında ümumi rəy yoxdur. Bundan başqa Azərbaycan dilindəki mətnlər üzərində aparılan tədqiqatlar az olduğundan hansı metodun yaxşı olduğunu söyləmək çətinidir. Əlbəttə, ingilis və rus dillərində olan mətnlərin araşdırılması üzrə müxtəlif metodlar təstiq edilmişdir. Lakin bu metodların Azərbaycan dilindəki mətnlər tətbiqinin uğurlu olacağını söyləmək korrekt olmazdı. Belə ki, Azərbaycan dili özünün quruluş xüsusiyyətlərinə görə o biri dillərdən fərqlənir. Buna görə də Azərbaycan dilindəki mətnlərin müəlliflərinin tanınması üçün istifadə olunan metodları dərinlən təhlil etmək lazımdır. Qeyd edək ki, Azərbaycan dilində olan mətnlərin müəlliflərinin indentifikasiyası üçün müəyyən işlər görülmüşdür [4-7].

Tutaq ki, $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ müəlliflər çoxluğuudur. Hər bir A_i müəllifin n_i sayda əsəri vardır. a_k^i ilə A_i müəllifinin k -cı əsərindəki simvolların sayını işarə edək. Fərz edək ki, əsərlərin yazıldığı dilin əlifbasındakı işarələrin sayı, yəni əlifbanın gücü M -ə bərabərdir. Onda A_i müəllifinin n_i sayda əsərindəki simvolların sayı

$$N_i = \sum_{k=1}^{n_i} a_k^i \quad (1)$$

münasibəti ilə təyin olunur. Bütün müəlliflərin əsərlərindəki simvolların sayı isə

$$N = \sum_{i=1}^m N_i = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} a_k^i \quad (2)$$

Mətnlərin müəlliflərinin tanınması məsələsini həll edərkən fərz olunur ki, hər bir mətn onun müəllifinin yazı üslubunu özündə saxlayır ki, bununla da əsl müəllifi digərlərindən fərqləndirmək mümkün olur. Mətnləri bir-biri ilə müqayisə etmək və müəllifi müəyyənləşdirmək üçün həmin mətnin uyğun elə ədədi xarakteristikasını qarşı qoymaq lazımdır ki, bu eyni bir müəllifin əsərləri üçün bir-birinə yaxın olsun, müxtəlif müəllifin əsərləri üçün bir-birindən əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənsin. Belə xarakteristikalardan biri n-qramlardır ki, bunlar da mətnlərin ardıcıl gələn n simvolların birləşməsini ehtiva edir.

Əvvəlcə onu da qeyd edək ki, gücü M -ə bərabər olan əlifbada bütün mümkün n-qramların sayı $\alpha(n, M) = M^n$ -ə bərabərdir.

İndi isə hər bir mətnədə olan n -qramların formalaşması prosesinə baxaq. A_i müəllifinin k -cı ($k = \overline{1, n_i}$) əsərindəki simvolların sayını müəyyən etmək onlarda hərflərdən başqa digər simvolları (durğu işarələri, başlıqlar və s.) atırıq və sözlər ardıcıl olaraq yazılır. Fərz edək ki, mətnin belə yazılışında simvolların sayı a_k^i -yə bərabərdir. Onda aydındır ki, bu mətnədə olan bütün n -qramların sayı $a_k^i - n + 1$ ifadəsinə bərabər olacaq. Onda A_i müəllifinin bütün əsərlərində olan n -qramların sayı

$$N_i^n = \sum_{k=1}^{n_i} (a_k^i - n + 1) = \sum_{k=1}^{n_i} a_k^i - (n - 1)n_i = N_i - (n - 1)n_i \quad (3)$$
 olar. Xüsusi halda $n = 1$ (monoqram) olduqda $N_i^1 = N_i$, $n = 2$ olduqda isə $N_i^2 = N_i - n_i$ olacaqdır.

İndi isə n -qrama uyğun əlamətləri müəyyənləşdirək. Mətnədəki n sayda ardıcıl hərflər birləşmələri müəyyən əlamətə uyğun gələcəkdir. Məsələn, $n = 1$ üçün monoqram halında bu əlamətlər əlifbadakı hərflər olacaqdır. Onda bütün mümkün əlamətlərin sayı elə mümkün n -qramların sayına bərabər olacaqdır. Xüsusi halda $n = 1$ olduqda bu əlamətlərin sayı M -ə bərabərdir. Lakin ayrı-ayrı müəlliflərin müxtəlif əsərlərində bu əlamətlərin sayı müxtəlif ola bilər. Yəni ola bilər ki, hər hansı bir müəllif müəyyən hərfdən istifadə etmir və buna görə də həmin hərfə uyğun əlamət olmayacaqdır. Fərz edək ki, i -ci müəllifin hər hansı bir mətnin müəllifi olduğunu təyin etmək üçün əlamətlər çoxluğu K_i -dir. Onda i -ci müəllifin k -cı əsərindəki s ($s \in K_i$) əlamətli n -qramların sayını N_{ik}^s ilə işarə edək. Bu halda i -ci müəllifin k -cı əsərindəki s əlamətinin orta qiyməti aşağıdakı düsturla müəyyən ediləcəkdir.

$$\Delta_{ik}^s = \frac{N_{ik}^s}{a_{k_i} - n + 1} \quad s \in K_i, i = 1 \dots n, k = 1 \dots n_i \quad (4)$$

Bu qayda ilə i -ci müəllifin bütün əsərlərində s əlamətinin orta qiyməti

$$\kappa_i^s = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} N_{ik}^s}{N_i - (n-1)n_i} \quad s \in K_i, i = 1 \dots m \quad (5)$$

kimi təyin edilə bilər. Bununla da biz i -ci müəllifin əsərlərindəki s əlamətinin orta qiymətini tapırıq. Bu orta qiymət bizə imkan verir ki, hər hansı yeni bir əsərin hansı müəllifə aid olduğunu müəyyən edək. Tutaq ki, bizə hər hansı bir L əsəri verilmişdir. Həmin əsərdəki simvolların sayını l ilə işarə edək. Aydındır ki, bu mətnədə olan bütün n -qramların sayı $l - n + 1$ qiymətinə bərabər olacaq. L əsərindəki s əlamətinə uyğun n -qramların sayını M_L^s ilə işarə edək. Onda bu əsərdəki s əlamətinin orta qiyməti

$$\eta_L^s = \frac{M_L^s}{l - n + 1} \quad s \in K_i \quad (6)$$

şəklində olacaq.

İndi isə $\kappa_i^s - \eta_L^s$ fərqi baxaq.

Bu fərq hər bir s əlamətinə görə L əsərinin i -ci müəllifinin əsərinə nə

dərəcədə yaxın olduğunu göstərir. Bu fərqi bütün s əlamətinə görə kvadratik normaya görə cəmləsək

$$\varepsilon_i = \sum_{s \in K} \alpha_s (k_i^s - \eta_L^s)^2, i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

ifadəsini alırıq ki, bu da L əsərinin əlamətlərinin i -ci müəllifi xarakterizə edən əlamətlərə nə dərəcədə yaxın olduğunu göstərir. Burada α_s əmsali s əlamətinə uyğun çəki əmsali olub, bu əlamətin müəllifinin təyin olunması üçün nə qədər vacib olduğunu xarakterizə edir.

Beləliklə, müəllifin təyin olunması (7) düsturu ilə ifadə olunması ε_i -nin i -yə nəzərən minimallaşmasının tapılması məsələsinə gətirilir.

Monoqrama (n=1) əsaslanan tanıma

İndi isə yuxarıda qeyd olunan düsturlar əsasında $n = 1$ olduqda müəllifin tanınması prosesinə baxaq. Bu zaman üç muxtəlif əlamətlər çoxluğundan istifadə edəcəyik. Birinci halda K əlamətlər çoxluğu kimi Azərbaycan dilinin bütün 32 hərifindən istifadə edəcəyik. Yəni bu halda $K = \{a, b, c, \dots\}$ kimi təyin olunur. Aydındır ki, hər bir müəllif üçün $K_i \subset K$ və deməli, $\cup_{i=1}^m K_i \subseteq K$ ola bilər. Beləliklə, bu halda tamamı K çoxluğundan olan əlamətlərə görə aparacağıq.

İkinci halda bizə hər bir müəllif üçün əhəmiyyətli olan əlamətlərdən istifadə edəcəyik. Buna görə də hər bir müəllif üçün əhəmiyyətli əlamətlər çoxluğunu aşağıdakı kimi təyin edək.

$$\bar{K}_i = \{s: s \in K_i, k_i^s > \varepsilon\}. \quad (8)$$

Burada k_i^s orta qiyməti (5) düsturu ilə təyin olunur. ε isə xüsusi halda $\frac{1}{32}$ -ə bərabər ola bilər. Bu halda əlamətlər çoxluğu kimi

$$\bar{K} = \cup_{i=1}^m \bar{K}_i \quad (9)$$

çoxluğunu götürə bilərik. Belə olan halda (7) ifadəsinin əvəzində

$$\varepsilon_i = \sum_{s \in \bar{K}_i} \alpha_s (k_i^s - \eta_L^s)^2 \quad (10)$$

ifadəsini istifadə edəcəyik.

Aşağıda beş müəllif **Elxan Elatlı, Rövsən Yerfi, Amid Səlimoğlu, Fyodor Dostayevski, Çingiz Aytmatov** üçün Exceldə üç test aparılmışdır.

Birinci testdə beş müəllif üçün əlamətlər kimi əlifbanın bütün böyük və kiçik hərfləri götürülmüşdür. Daha sonra hər bir müəllif üçün özünün naməlum əsəri və digər müəlliflərin naməlum əsərləri götürülmüş və əvvəlcədən test edilmiş öz əsərləri ilə müqayisə edilmişdir. Nəticə olaraq Test 1-də ən kiçik Elxan Elatlının naməlum əsəri, Test 2-də Amid Səlimoğlunun naməlum əsəri üçün orta kvadratik xəta minimum olmuşdur.

all	Test1(E.E)	Test2(R.Y)	Test3(A.S)	Test4(T.D)	Test5(Ç.A)
Elxan Elatlı	0.000709082+	0.00115	0.001126652+	0.00105	0.05354
Rövsən Yerfi	0.00082013	0.00118816	0.001271268	0.03612	0.000915916
Amid Səlimoğlu	0.0012	0.0007	0.0012	0.00115666+	0.0249
T.Dostayevski	0.0095	0.0108	0.009785633	0.00857	0.00894+
Çingiz Aytmatov	0.01	0.010510294	0.010126	0.008320952	0.009

İkinci testdə əlamətlər kimi işlənmə tezliyi 3%-dən çox və ya bərabər olan hərfləri götürülmüşdür. Daha sonra hər bir müəllif üçün özünün naməlum əsəri və digər müəlliflərin naməlum əsərləri götürülmüş və əvvəlcədən test edilmiş öz əsərləri ilə müqayisə edilmişdir.

3	Test1(E.E)	Test2(R.Y)	Test3(A.S)	Test4(T.D)	Test5(Ç.A)
Elxan Elath	0,000727826+	0,00117	0,000615015	0,00106	0,05504
Rövşən Yerfi	0,00081367	0,00122346	0,000677849	0,03076	0,000940877+
Amid Səlimoğlu	0,00124	0,00065	0,00072+	0,001164111	0,01999
T.Dostayevski	0,0056	0,0063	0,005558287	0,00507629	0,00497
Çingiz Aytmatov	0,005648	0,005162129	0,005276	0,004151309	0,004096

Üçüncü testdə beş müəllif üçün əlifbanın əlamətləri kimi əsərdə sayı 0 olmayan bütün hərfləri götürülmüşdür. Daha sonra hər bir müəllif üçün özünün naməlum əsəri və digər müəlliflərin naməlum əsərləri götürülmüş və əvvəlcədən test edilmiş öz əsərləri ilə müqayisə edilmişdir.

0	Test1(E.E)	Test2(R.Y)	Test3(A.S)	Test4(T.D)	Test5(Ç.A)
Elxan Elath	0,000717701+	0,00116	0,000606353	0,00105	0,05437
Rövşən Yerfi	0,00082881	0,00120233	0,000677672	0,03249	0,000920563
Amid Səlimoğlu	0,0012	0,0007	0,0013+	0,001158565	0,0217
T.Dostayevski	0,0055	0,0062	0,005459203	0,005045562	0,00489
Çingiz Aytmatov	0,00557	0,005132916	0,005202	0,004121143	0,004052+

Bu müqayisələri təhlil etdikdə görürük ki, birinci testdə 20%, ikincidə 40%, üçüncüdə isə 60% düzgün nəticə alınmışdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Морозов Н.А. Лингвистические спектры: средство для отличения плагиатов от истинных произведений того или иного известного автора. Стилеметрический этюд. // Известия отд. русского языка и словесности Имп.Акад.наук, Т.XX, кн.4, 1915.
2. Марков А.А. Пример статистического исследования над текстом “Евгения Онегина” иллюстрирующий связь испытаний в цепь. // Известия Имп.Акад.наук, серия VI, Т.Х, N3, 1913, с.153.
3. Милов Л. От Нестора до Фонвизина. Новые методы определения авторства. - Москва: Прогресс, - 1994.
4. Aida-zade K.R., Talibov S.G. Analysis of the effectiveness of the methods of recognition of authorship of texts in the Azerbaijani language // The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA-2015), 27–29 August, 2015, Baku, Azerbaijan, pp.183.
5. Gasimov S., Ibrahimov I. Analysis of sentences and words used in azerbaijani texts // The Second International Conference Problems of Cybernetics and Informatics, September 10–12, 2008, Baku, pp. 117–119.
6. Айда-заде К.Р., Талыбов С.Г. Анализ методов определения авторства текстов на азербайджанском языке. İnformasiya texnologiyaları problemləri, - 2017, - №1, - s.15–25.
7. Vəliyeva K.A. Kompüter dilçiliyinin müasir istiqamətləri. İnformasiya cəmiyyəti problemləri, - 2016, - No 2, - s. 98–107.

N-ГРАММНЫЙ МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ ТЕКСТОВ НА АЗЕРБАЙДЖАНСКОМ ЯЗЫКЕ

Л.М.ГАСАНОВА

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрена проблема определения авторства текста путем формального анализа. Новый метод основан на формальной математической модели последовательности букв текста, как реализацией N-граммы.

Ключевые слова: признание авторов, знаки n-грамм, квадратичная норма, тесты

N-GRAM METHOD FOR RECOGNITION OF TEXTS IN AZERBAIJANI LANGUAGE

L.M.HASANOVA

SUMMARY

The article solves the problem of determining the authorship of the text through a formal analysis of the text. The new method is based on a formal mathematical model of the sequence of letters of the text as an implementation of an N-gram.

Keywords: recognition of the authors, n-gram signs, quadratic norm, tests

UOT 519.95

RİYAZİ EKOLOGİYA MODELƏRİ

G.A.RƏHİMOVA

Bakı Dövlət Universiteti
gularaisayevaali@mail.ru

Ekoloji obyektlərin və proseslərin modellərini və onların öyrənilməsi üsullarını riyazi ekologiya öyrənir. Riyazi ekologiyada istifadə olunan riyazi modelləri müxtəlif növlərə bölmək olar. Başqa sözlə, determinik, stoxastik və empirik-statistik modelləri fərqləndirirlər. Determinik riyazi modellər sistemin daxili təsvirinə əsaslanır və sistemin komponentləri arasında əlaqəni ifadə edir (Maltus modeli). Təsadüfi funksiyaları ehtiva edən riyazi modellər isə stoxastikdir. Empirik-statistik modellər giriş və çıxış sistem dəyişənləri arasında funksional asılılıqlar (reqressiya modelləri) yaratmaq üçün sistem haqda empirik məlumatlardan istifadə edir. Empirik-statistik modellər qurularkən riyazi statistikanın metodlarından istifadə edilir.

Ekologiyada riyazi modelləşdirmə, demək olar ki, bu elmin yarandığı vaxtdan tətbiq edilir. Canlı təbiətdəki orqanizmlərin davranışını riyaziyyat vasitəsi ilə adekvat təsvir etmək ən mürəkkəb fiziki proseslərdən qat-qat çətin olsa da, modellər ayrı-ayrı populyasiyaların, eləcə də fərdlərin inkişafında bəzi qanunauyğunluqları və ümumi meylləri müəyyən etməyə kömək edir. Tədqiqatın əsas məqsədi ekologiyada kompüter modelləşdirməsinin aparılması üçün mühüm riyazi aparatın təyin olunması, eləcə də ekoloji proseslərin modelləşdirilməsində imitasiya modelləşdirməsinin əhəmiyyətini sübut etməkdir.

Qeyd edək ki, ekologiyada riyazi (kompüter) modelləşdirmə həm modelləşdirmə obyektlərinin seçimi baxımından, həm metodlar toplusu baxımından, həm də həll ediləcək məsələlərin spektri baxımından kifayət qədər geniş tədqiqat sahəsidir. Buna görə də modelləşdirmənin bütün aspektlərini bir anda əhatə etmək kifayət qədər çətinidir. Bu baxımdan təqdim olunan işdə diqqət diferensial tənliklərdən istifadə edərək modelləşdirməyə yönəldilmişdir. Bu tip modellərin öz üstünlükləri və mənfə cəhətləri var. Bu da diferensial və ya fərq tənliklərinin proseslərin dinamikasını real vaxtda təsvir etməsi ilə bağlıdır.

Açar sözlər: simulyasiya modelləşdirməsi, ekologiyada kompüter modelləşdirməsi, biologiyada kompüter modelləşdirməsi, eko modellər, modelləşdirmənin tətbiqləri.

Ekologiya – güclü tədqiqatlara ehtiyac duyulan bir sahədir. Keçən əsrin 60-cı illərində bir qrup mütəxəssislərdən savayı geniş ictimaiyyətə bu sözün mənası məlum deyildi. Bütün bunlara baxmayaraq bu termin 150 ildir ki, məlumdur. 1869-cu ildə alman təbiətşünası Ernst Hekkel biologiyanın yeni bir bölməsi kimi ekologiya terminini («eko» - ev, yaşayış yeri və «lo-gos» - elm, bilik) təklif etdi [1, 58].

Klassik ekologiya – ətraf mühitin və orqanizmlərin qarşılıqlı əlaqəsi haqqında elmdir. Bu gün ekologiya dedikdə, çox zaman klassik ekologiyayı deyil, yeni elmi istiqamət kimi formalaşmış, ətraf mühitin mühafizəsi problemləri və insan cəmiyyətilə bu mühitin qarşılıqlı əlaqəsini öyrənən sosial ekologiya nəzərdə tutulur.

Bu məqalədə biz «köhnə» ekologiyanın bir neçə klassik modellərilə tanış olmaqla kifayətlənəcəyik. Bunun bir neçə səbəbi var.

Birincisi, klassik modellər kifayət qədər öyrənilib və sadədir. Bu tip məsələlərin qoyuluşu aşkar, dərk etmək nöqtəyi-nəzərdən faydalı və maraqlıdır.

İkincisi – ətraf mühitin çirklənməsi və tullantıların yayılması ilə bağlı modellər – həddən artıq mürəkkəb riyazi aparatdan istifadə etməyi tələb edir.

Lakin bu sahədə tam formalaşmış riyazi aparat hələ ki, yoxdur.

Mövzuda rast gələcəyimiz bir neçə terminə açıqlama verək.

Fərd – müstəqil yaşayan orqanizm.

Populyasiya – eyni bir vaxtda yaşayan və müəyyən ərazini tutan, eyni bir növə məxsus fərdlərin toplusu.

Və nəhayət *qrup* – (və ya cəmiyyət) dedikdə, birgə yaşayan, həyat sürən populyasiyalar toplusu nəzərdə tutulur.

Klassik ekologiyada bir neçə tipin (növün) qarşılıqlı əlaqəsinə baxılır:

-Orqanizm və ətraf mühitin əlaqəsi;

- Populyasiya daxili fərdlərin qarşılıqlı əlaqəsi;

- Müxtəlif növ fərdlərin qarşılıqlı əlaqəsi (populyasiyalar arasındakı qarşılıqlı əlaqə).

Praktiki olaraq, ekologiya elmi meydana çıxan andan burada riyazi modellərdən istifadə olunur.

Ən mürəkkəb fiziki proseslərdən fərqli olaraq, canlı təbiətdə orqanizmlərin davranışını adekvat riyazi vasitələrlə təsvir etmək həddən artıq çətinidir. Lakin bütün bunlara baxmayaraq, bu sahədə tətbiq olunan riyazi modellər ayrı-ayrı qrup və populyasiyaların ümumi inkişaf tendensiyalarını və bir sıra qanunauyğunluqları müəyyən etməyə kömək edir [2, 112].

Klassik ekologiyada riyazi modellərin yaradılmasının əsas məqsədləri aşağıdakılardır:

1. Modellər çoxlu sayda unikal müşahidələrin çox zəruri, lakin dağınıq, pərakəndə xüsusiyyətlərini bir neçə parametrlə köməyilə ifadə etməyə, birləşdirməyə və ya bu müşahidələrin mahiyyətini açıqlamağa kömək edir. Bu da öz növbəsində baxılan proses və ya problemi təhlil etməkdə ekoloqa köməkdir.

2. Modellər sanki «ümumi dil» kimi çıxış edir və bu dilin köməyilə hər bir unikal hadisə təsvir oluna bilər və bu cür hadisələrin nisbi xüsusiyyətləri

yətləri daha tez aşkar olunur.

3. Model-«ideal obyekt» və ya ideallaşdırılmış davranış nümunəsi ola bilər. Müqayisə yolu ilə obyekt və prosesləri ölçmək və qiymətləndirmək mümkündür.

4. Modellər - real aləmin qeyri-mükəmməl imitasiyası olmaqla həqiqətən də bu aləmə yeni bir nur, «ışığı» sala bilərlər.

Ekologiyada riyazi modellər qurularkən, bioloji sistemlərin spesifik xüsusiyyətlərini nəzərə almaqla mexaniki və fiziki sistemlərin modelləşdirilməsi təcrübəsindən istifadə olunur:

- hər bir fərdin daxili quruluşunun mürəkkəbliyi;
- orqanizmlərin həyat fəaliyyətləri üçün zəruri şəraitin, xarici mühitin bir sıra amillərindən asılılığı;
- ekoloji sistemlərin qapalı olması.

Kompüterlərin tətbiqi, ekoloji prosesin modelləşdirilməsi imkanlarını xeyli genişləndirdi.

Burada məxsusi olaraq prinsip etibarlı ilə yeni bir istiqamət olan imitasiya modelləşdirilməsinin meydana çıxmasını qeyd etmək lazımdır.

Növdaxili rəqabət modelləri.

Diskret dövrlərlə çoxalan (artan) rəqabət modelinə baxaq. Populyasiyanın t zaman anında sayı- N_t -dir. Və təmiz artım sürəti ilə (R) mütənəsb olaraq zamana görə dəyişir. Bu cür növlərə bitkilərin və həşəratların böyük bir qismini aid etmək olar. Bu növlərin müxtəlif nəsilləri zamana görə dəqiq qeydə alınıb. R əmsalı, bir mövcud (yaşayan) fərdə nəzərən artan fərdlərin miqdarını (eyni zamanda artıq yaşayan fərdlərin sağ olmasını) xarakterizə edir. Bu model aşağıdakı tənliklə ifadə oluna bilər:

$$N_{t+1} = N_t * R , \quad (1)$$

belə ki,

$$N_t = N_0 * R^t , \quad (2)$$

harada ki, N_0 -populyasiyanın ilkin sayıdır.

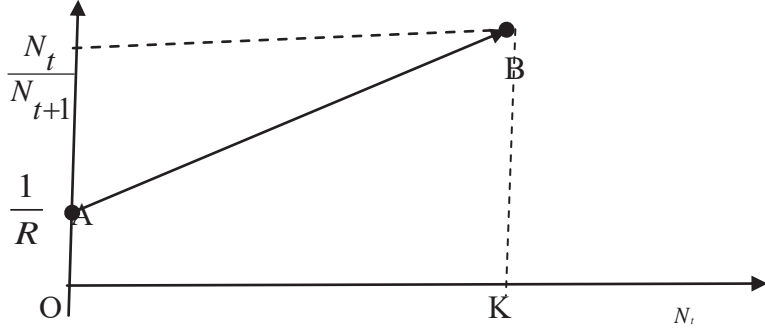
Bu model - rəqabətin olmadığı populyasiyanı təsvir edir və bu burada $R=const$. Əgər $R>1$ olsa, populyasiyanın sayı sonsuz olaraq artacaq [3, 141].

Mənbələrdə populyasiyanın sürətli artımına aid çox maraqlı misallar var. Xüsusən bu bitkilərə, həşəratlara və mikroorqanizmlərə aid olan misallardır. Əgər bunların artımı üçün əlverişli, ideal şərait olsa Yer kürəsi qalın bir qatla örtülə bilər. Həqiqətdə isə həndəsi silsilə ilə artan populyasiya uzunmüddətli zaman kəsiyində müşahidə olunmur. Beləliklə, (1) tənliyini elə dəyişdirmək lazımdır ki, təmiz artım sürəti növdaxili rəqabətdən asılı olsun. Rəqabəti - hər hansı bir orqanizm tərəfindən bir sıra resursların qida, su, işıq, məkan - istifadə olunması və bununla da digər orqanizmlər üçün bu resursların əlçatmaz olması (azalması) kimi qiymətləndirmək olar.

Əgər rəqabət aparən orqanizmlər eyni bir növə aiddirsə, onda bunların arasındakı qarşılıqlı münasibəti növdaxili rəqabət adlandırılar.

Şəkil 1-də törəmə (artma) sürətinin populyasiyanın sayından sadə mümkün olan asılılıq qrafiki təsvir olunub.

A nöqtəsi - populyasiyanın sayının 0-a yaxın olduğu situasiyanı əks etdirir. Bu zaman rəqabət praktiki olaraq yoxdur və artımın faktiki sürətini R parametrinin ilkin vəziyyətilə təsvir etmək olar. Deməli, aşağı sıxlıqlı populyasiya zamanı (1) tənliyi doğrudur (və ya ədalətlidir).



Şəkil 1. Populyasiyanın artım sürətinin məhdudluğu.

(1) tənliyinin dəyişdirilmiş forması aşağıdakı kimi olacaq:

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = \frac{1}{R}$$

B nöqtəsi isə əksinə. Populyasiyanın yüksək olduğu situasiyanı əks etdirir və kifayət dərəcədə növdaxili rəqabəti üzə çıxarır.

Rəqabət nəticəsində faktiki artma (törəmə) sürəti o qədər azalır ki, populyasiya bütünlükdə yalnız hər nəsildə öz sayını bərpa edə bilər.

Ona görə ki, doğulan fərdlərin miqdarı ölənlərin miqdarı ilə tarazlaşır.

Şəkil 1-də təsvir olunmuş hipotezə aşağıdakı tənlik uyğun gəlir:

$$N_{t+1} = \frac{N_t * R}{1 + \alpha * N_t} \quad (3)$$

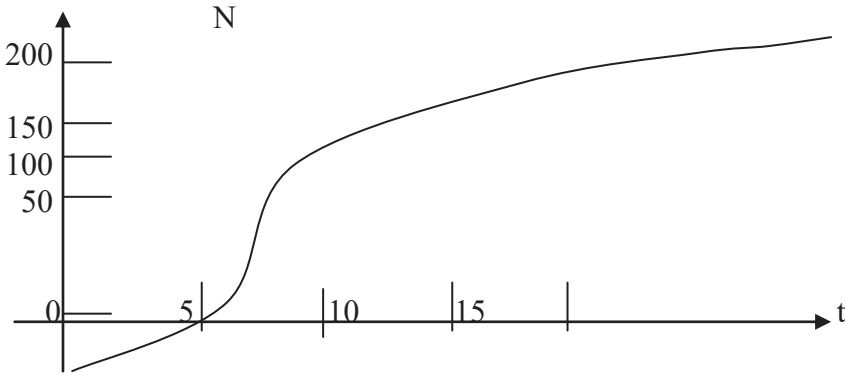
harada ki, $\alpha = \frac{R-1}{K}$.

Bu tənlik növdaxili rəqabətlə məhdud olan populyasiyanın artım modelidir.

Modelin mahiyyəti ondadır ki, (1) tənliyindəki R sabiti artımın faktiki sürətilə əvəz olunur. Başqa sözlə, $\frac{R}{1 + \alpha * N_t}$ ilə.

Bu kəmiyyət populyasiyanın sayı artdıqca azalır. Alınmış tənliyin üstünlüyü onun sadəliyindədir. Bu tip rəqabət populyasiya sayının öz-özünə

tənzimlənməsinə gətirib çıxarır (şəkil 2).



Şəkil 2. (3) tənliyinə uyğun olaraq populyasiya sayının dəyişməsi.
($R=2$, $K=200$, $N_0=20$ olan hal üçün).

(3) tənliyində sadə dəyişiklik aparmaqla rəqabətin intensivliyini nəzərə alan daha ümumi model almaq olar. Populyasiyanın artım sürətinin saydan asılı olaraq aşağı düşməsinin asılılıq qrafiki (şəkil 1) təbiətin qanunu deyil, yalnız əlverişli hipotezdir.

$$N_{t+1} = \frac{N_t * R}{1 + (\alpha * N_t)^b} \quad (4)$$

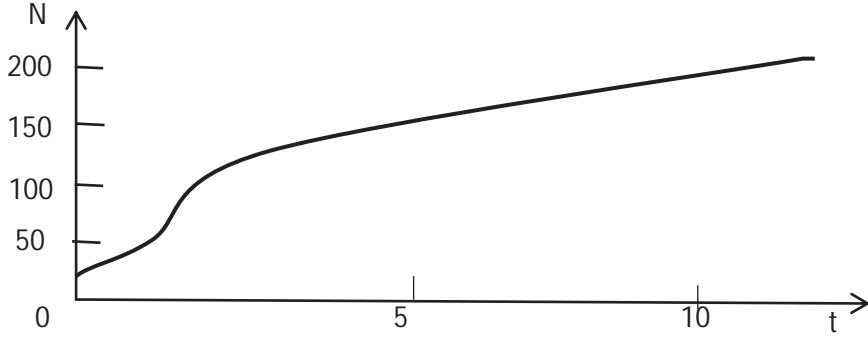
Növdaxili rəqabətlə müəyyən olunan populyasiyanın real dinamikası heç də hər zaman, hətta kəmiyyətə belə şəkil 2-də təsvir olunmuş modelə uzlaşmır. Populyasiyanın artım sürətinin aşağı düşmə qanunu haqda daha ümumiləşdirilmiş hipotezi aşağıdakı tənliklə ifadə etmək olar:

Verilmiş bu modelin (3) tənliyindən fərqli olaraq ümumiliyi $-b$ parametrisinin daxil edilməsindədir. b parametri – artım sürətinin populyasiyanın sayından asılılıq tipinin növünü müəyyən edir.

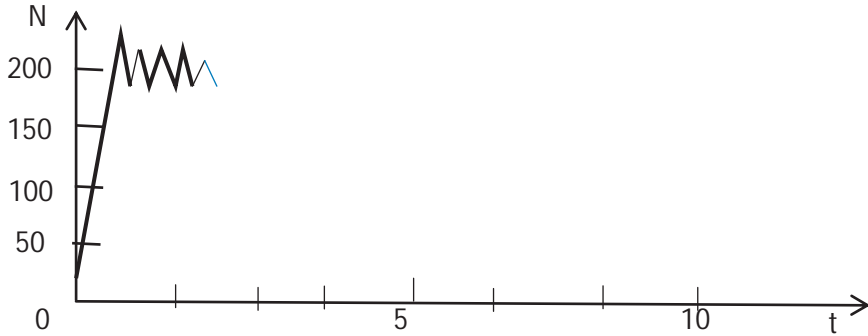
α , b , R kəmiyyətlərindən kəskin fərqli situasiyaları müqayisə üçün istifadə etmək olar. (4) tənliyinin digər müsbət cəhəti, onun real aləmin tamamilə yeni aspektlərini işıqlandırmaq qabiliyyətidir.

Populyasiyanın dinamikasını təsvir edən əyrilərin təhlili vasitəsilə təbii populyasiya haqqında qabaqcadan müəyyən nəticəyə gəlmək mümkündür.

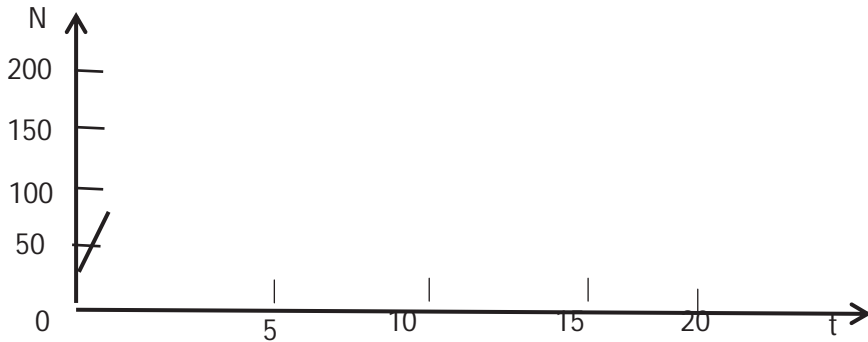
Şəkil 3 a, b, c və d-də ədədi modelləşdirmənin köməyiylə populyasiya sayının dinamikasının (4) tənliyi vasitəsilə müxtəlif variantları göstərilmişdir, b və R parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində.



Şək. 3 a. Stasionar populyasiya sayının monotonluğu $b=1,4$, $R=2$ olduqda



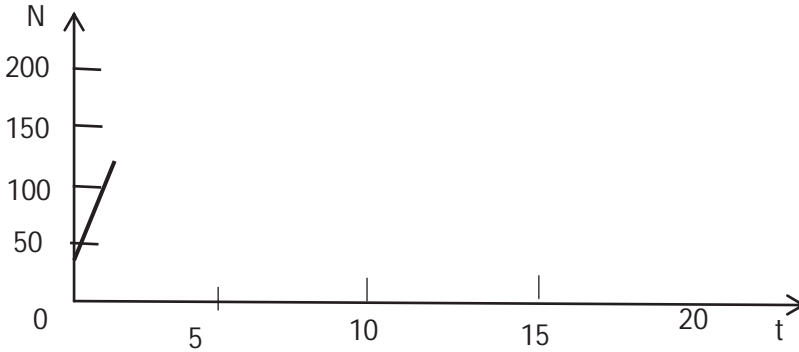
Şək. 3b. $b=3,9$, $R=2$ olduqda populyasiya sayının stasionar rəqsi hərəkəti



Şək. 3c. $b=3,6$, $R=4$ olduqda populyasiya sayının dəyişməsinin limit dövrünün dayanıqlığı

(4) modeli ilə əlaqəli tədqiqatın mühüm hissəsi, (b, R) baza müstəvisində monoton sönməni, zəifləyən rəqsləri, dayanıqlı limit dövrlərini və təsadüfi (xaotik) dəyişmələri ayıran sərhədlərin qurulmasıdır (şəkil 4). Bunun üçün a və N_0 qiymətlərini vermək və b , R parametrlərini dəyişməklə hesablamaları aparmaq lazımdır. Mümkün variantların hər birini fərqləndirmək üçün kompüterin ekranında populyasiya sayının dəyişməsi qrafiklərini

qurmaq üçün vizual hərəkət etmək və bu zaman bir rejimdən digər rejimə keçdikdə b , R parametrlərinin uyğun qiymətlərini yadda saxlamaq lazımdır.



Şəkl. 3 d. $b = 4.4$, $R = 4$ olduqda populyasiya sayının təsadüfi dəyişməsi

Bir şeyi qeyd etmək lazımdır ki, kvaziperiodiklik, aperiodiklik və xaotik hərəkətlər arasında fərqin qurulması – mürəkkəb riyazi məsələdir. Onun həlli üçün Furye çevirmələrindən və digər çevirmələrdən istifadə olunur [4, 232].

(3) və (4) tənliyinə əsasən, ekologiyada bütün modellər üçün ödənilən ümumi xarakterli bir qeydi xüsusi olaraq vurğulamaq istəyirəm. Dəqiq təbiət qanunlarına əsasən qurulmuş modellərə malik fizikadan fərqli olaraq, ekologiyada modellər daha çox şərtidir. Onun reallığa adekvatlığı yalnız eksperimental olaraq yoxlana bilər.

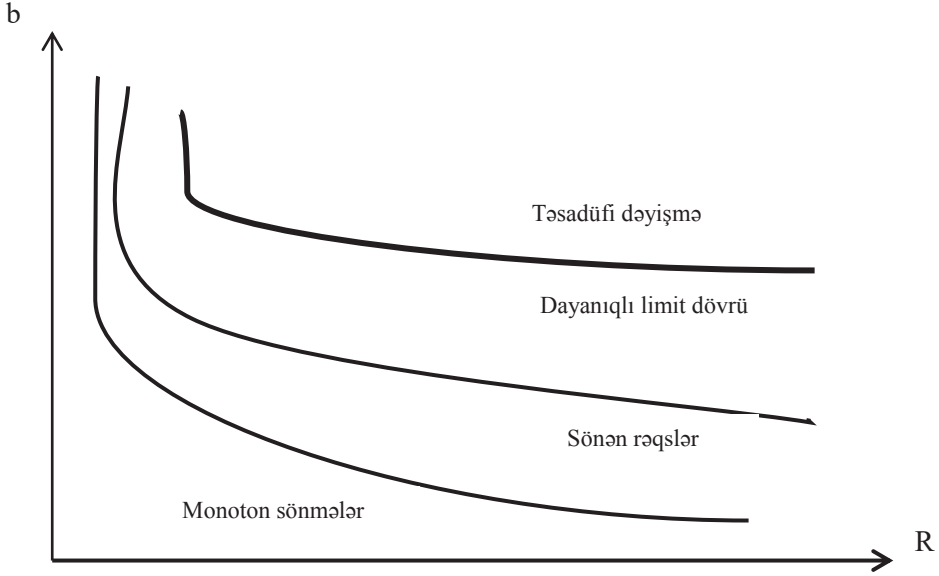
Belə ki, ekoloqlar şəkil 4-də təsvir olunmuş, dinamiklərin hər birini dəfələrlə müşahidə ediblər, uyğun model üçün faydalılıq haqda nəticə çıxarmaq olar (əks halda o, ancaq riyazi tapşırıq ola bilər).

Beləliklə, biz diskret dövrlü çoxalmaya malik populyasiyalarda tətbiq edilən modellərə baxdıq. Lakin təbiətdə elə populyasiyalara rast gəlinir ki, orqanizmlərin doğulması və məhvi düzgün getmir, belə populyasiya modelləri üçün aşağıda göstərilən tənliklər məsləhət deyil.

Kəsilməz çoxalmaya malik populyasiyaya baxaq və sayına görə dəyişən populyasiyanın modelini quraq. Burada riyazi aparat diferensial tənliklər olacaq. Bu halda artım tempinin sürəti

$\frac{\partial N}{\partial t}$ kimi göstərilə bilər, onda sayın orta artım sürəti, bir individ üçün

hesablamada $\frac{\partial N}{\partial t} * \frac{1}{N}$ kəmiyyətilə müəyyən edilir:



Şəkil 4. Diskret artımlı populyasiya sayının dinamikasının faza diaqramının sxematik təsviri

Növdaxili konkurensiyayı hesablamadan alarıq:

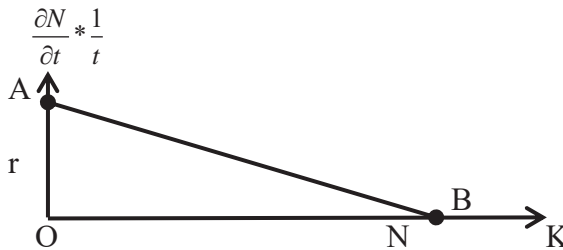
$$\frac{\partial N}{\partial t} * \frac{1}{N} = r \quad \text{və ya} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = rN.$$

r vasitəsilə sayın artma tempinin ani sürəti işarə edilmişdir (b.s., bir individ üzrə hesablamada vahid zaman müddətində sayın artımı). Bu modeldən belə nəticə çıxır ki, növdaxili konkurensiyalar hələ tam öyrənilməmişdir, $r > 0$ olduqda populyasiyanın sayı qeyri-məhdud artacaq, başqa sözlə, eksponensial temp müşahidə olunacaqdır.

İndi növdaxili konkurensiyayı öyrənməyə çalışaq. Bunun üçün biz yuxarıda tətbiq etdiyimiz metoddan istifadə edəcəyik.

Şəkil 5-ə baxaq. Populyasiya sayı 0-ra yaxın olduğu halda artım sürəti r kəmiyyəti ilə təyin olunur, belə ki, konkurensiya populyasiyanın artımına təsir etmir (A nöqtəsi).

Nə zaman ki, N artaraq K -nın qiymətinə yaxınlaşır (əhalinin limit sıxlığı), onda populyasiyanın artım sürəti 0-radək azalır (B nöqtəsi).



Şəkil 5. Populyasiya sayının təkrar istehsal sürətindən asılılığı

AB düz xəttinin tənliyini yazsaq, alarıq:

$$\frac{dN}{dt} = r * N * \frac{(K-N)}{K} \quad (5)$$

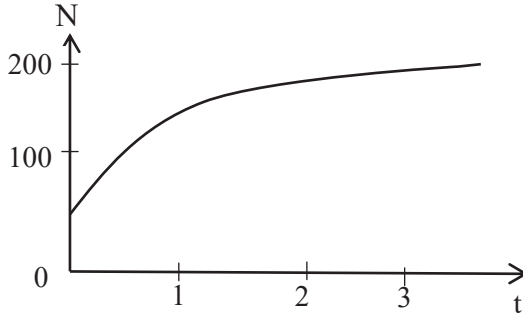
Sonuncu tənlik “logistik tənlik” adı ilə məşhurdur. Onun üstün xüsusiyyətlərindən biri sadəliyidir. Tənlik standart növə aiddir və analitik həllə malikdir:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \quad (6)$$

Ekologiyanın tarixində bu tənlik böyük əhəmiyyətə malikdir, o, ekologiyada riyazi metodların tətbiqində böyük rol oynamışdır. Digər tərəfdən, tənliyin sadəliyi onun tətbiq oblastlarında məhdudiyətləri meydana çıxarır, belə ki, onun köməyiylə bir neçə real populyasiyanı təsvir etmək olar.

Lakin bütün məhdudiyətlərə baxmayaraq, aşağıda baxılan logistik tənlik populyasiyanın artım dinamikasının tərkib hissəsi kimi istifadə olunur [5, 255].

(5)-(6) düsturlarına uyğun populyasiya sayının dəyişməsi şəkil 6-da göstərilmişdir.



Şəkil 6. $N_0 = 25$, $K = 200$, $r = 3$ olduqda populyasiya sayının artım dinamikası

Növlərarası rəqabətin logistik modelinin qurulması alqoritmi.

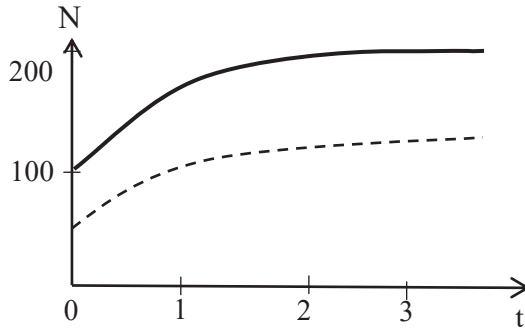
Növlərarası rəqabətin mahiyyəti ondadır ki, bir növün individlərinin nəsilvermə qabiliyyəti, yaşam qabiliyyəti və artma sürəti eyni bir resursdan istifadə nəticəsində azalır və digər növün individləri konkurensiyanın təsiri nəticəsində bu və ya digər ölçüdə müxtəlif növlərin təsirinə məruz qalırlar.

Belə ki, biz iki müxtəlif populyasiya ilə maraqlanırıq. Onlar üçün aşağıdakı işarələmələri qəbul edək. Tutaq ki, N_1 - birinci populyasiyanın, N_2 –isə ikinci populyasiyanın sayıdır.

Onda təmin edilmənin limit sıxlığı və populyasiyanın doğuşdan maksimal artım sürəti uyğun olaraq K_1 , K_2 , r_1 və r_2 –dir (şəkil 7).

(5) logistik tənliyinə baxaq və ondakı növlərarası rəqabəti öyrənməyə çalışaq. Fərz edək ki, M ikinci növün individidir və birinci növün indivi-

dinə də eyni qayda ilə təsir edir. $\frac{1}{M}$ sabiti bu halda rəqabət əmsalı adlandırılır və onu α_{12} kimi işarə edək.



Şəkl. 7. $R_1=2, r_2=4, K_1=200, K_2=180, \alpha_{12}=0.5, \alpha_{21}=0.65,$

$N = 100, N^2 = 25$ olduqda populyasiyanın dayanıqlı birgə yaşaması.

Belə ki, birinci növə olan bütün təsirləri əks etdirmək üçün logistik tənliyin sürətində N-in yerinə $N_1 + \alpha_{12} \cdot N_2$ yazacağıq.

Analoji olaraq ikinci populyasiyanın sayının tədqiqi üçün də tənlik ala bilərik. Nəticədə iki diferensial tənlikdən ibarət sistem alırıq:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 * N_1 \frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12}N_2}{K_1} \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 * N_2 \frac{K_2 - N_2 - \alpha_{21}N_1}{K_2} \end{cases} \quad (7)$$

Bu sistemlə ifadə olunan növlərarası rəqabət modeli onun müəllifinin şərəfinə «Lotki-Volterra modeli» adlanır.

Qeyd edək ki, əgər α_{12} və α_{21} əmsalları vahiddən böyükdürsə, onda rəqabət aparən populyasiyanın öz növünün individlərinə olan kənar təsiri, digər növün individlərinə olan kənar təsirdən daha güclü olur.

Dayanıqlı birgə yaşama yalnız $\alpha_{12} \cdot \alpha_{21} < 1$ olduqda əldə edilir. Bütöv xətt -birinci populyasiyanın sayı, ştrix xətt – ikinci populyasiyadır.

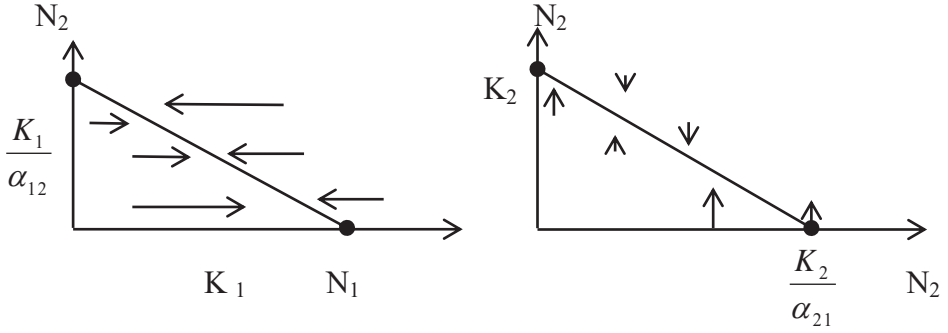
Növlərarası rəqabət tədqiqatçısını maraqlandıran əsas sual hər bir növün sayının hansı şəraitdə artması və ya azalmasıdır?

Bu suala cavab vermək üçün hər iki növün sayının bütün mümkün birləşmələrini göstərən diaqramlar qurmaq lazımdır. Belə diaqramlarda bir növün sayı üfüqi ox boyunca, digərinin sayı isə şaquli ox boyunca çəkilir.

Bəzi növlərin sayının birləşmələri ilə müşahidə üçün seçilmiş populyasiyada artım, digərlərində isə onun sayında azalma qeyd olunacaq.

Həm də növlərin hər biri üçün izoklinlər çəkmək mümkündür, belə ki, izoklinlərlə sayın nə artması, nə də azalması müşahidə olunmayan xətlər

təsvir olunur (şəkil 8).



Şəkil 8. Lotka-Volterra modelindən istifadə etməklə əldə edilən izoklinlər.

Bu bərabərlik vuruqlardan hər hansı biri sıfıra bərabər olduqda yerinə yeyilir. Ən maraqlı situasiya isə

$$K_1 - N_1 - \alpha_{12} * N_2 = 0 \quad \text{və ya} \quad N_1 = K_1 - \alpha_{12} * N_2$$

olduqda alınır.

Oxların uzunluqları növ sayının dəyişməsi ilə mütənəsbdir, oxlar növlərin sayının dəyişmə istiqamətini göstərir.

Beləliklə, gördüyünüz kimi (N_1, N_2) müstəvisində düz xəttin tənliyi olan izoklin tənliyi əldə edilir.

İzoklindən yuxarı və sağa doğru, hər iki populyasiyanın çoxluğu səbəbindən 1-ci növ populyasiyanın sayı azalır, əks istiqamətlərdə artır. (İzoklinin yuxarısında və sağında $\frac{\partial N_1}{\partial t}$ törəməsi mənfidir və buna görə də birinci

populyasiyanın sayı azalır. İzoklinin aşağısında və solunda $\frac{\partial N_1}{\partial t}$ törəməsi müsbətdir və buna görə də birinci populyasiyanın sayı artır).

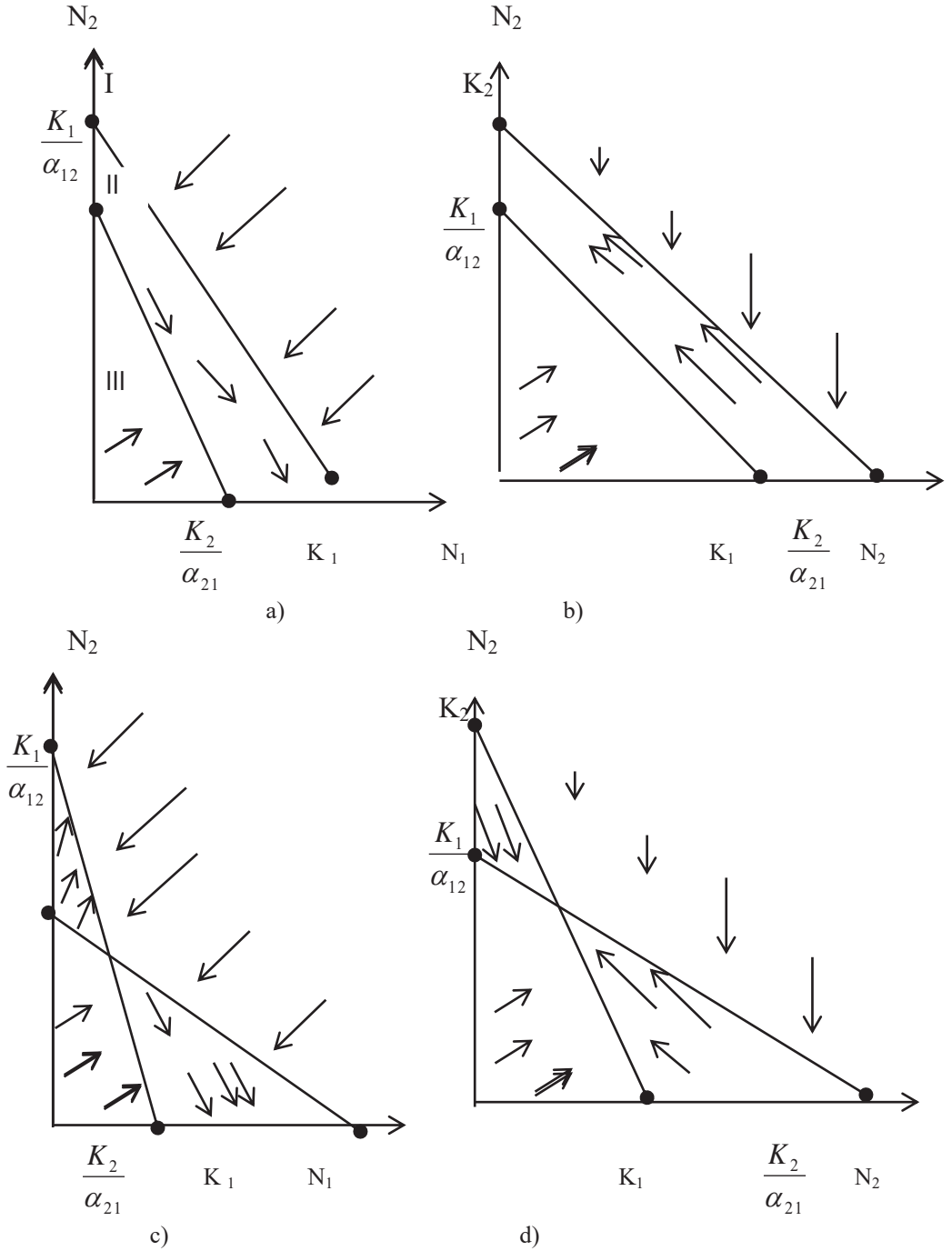
Analoji olaraq, 2-ci növ üçün izoklinlər qurmaq mümkündür.

Şəkil 9-da müvafiq izoklinlər qurulmuşdur və onlar populyasiyaların sayındakı dəyişiklikləri göstərir.

Yuxarıdakı problemi həll etmək üçün hər iki növün izoklinlərini bir faza müstəvisində birləşdirir və eyni zamanda onların saylarının dinamikasını öyrənirik.

İzoklinlər bir-birinə nisbətən dörd fərqli şəkildə düzülür ki, bu da rəqabətin fərqli nəticəsini verir.

Şəkil 9-da M.Biqon və digər müəlliflərin “Ekologiya” kitabından götürülmüş, (7) tənliklər sistemindən istifadə etməklə əldə edilmiş, rəqabətin nəticələri təqdim edilmişdir.



Şəkil 9. Müxtəlif parametrlər üçün Lotka-Volterra modelindən istifadə etməklə əldə edilmiş rəqabətin nəticələri. Şəkil a-da I zonada hər iki populyasiyanın sayı azalır; II zonada - birinci populyasiyanın sayı artır, ikincisi - azalır; III zonada - hər iki populyasiyanın sayı artır.

ӘДӘБИҮҮАТ

1. Ризниченко, Г.Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии. Учебное пособие для бакалавриата и магистратуры: моногр. / Г.Ю. Ризниченко. - Москва: Юрайт, - 2016. - 520 с.
2. Тутубалин, В.Н. Математическое моделирование в экологии. Историко-методологический анализ: моногр. / В.Н.Тутубалин. - Москва: Языки славянских культур, - 2011. - 298 с.
3. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества: Пер. с англ. В двух книгах. Кн. 1. - Москва: Мир, - 2009, - 259 с.
4. Горстко А. Б.Познакомьтесь с математическим моделированием. - Москва: Знание, - 2011.
5. Горстко А.Б., Угольницкий Г.А. Введение в моделирование эколого-экономических систем. - Ростов: РГУ, 2000, - 320 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Г.А.РАГИМОВА

РЕЗЮМЕ

Математическое моделирование в экологии используется практически с момента возникновения этой науки. Самые сложные физические процессы, модели помогают установить некоторые закономерности и общие тенденции развития отдельных популяций, а также сообществ и поэтому адекватно описать поведение организмов в живой природе гораздо труднее средствами математики.

Цель нашей работы познакомиться с некоторыми методами компьютерного моделирования в экологии и доказать важность компьютеров в моделировании экологических процессов. Однако математическое (компьютерное) моделирование в экологии достаточно обширная область исследования по выбору объектов моделирования, по набору методов и по спектру решаемых задач. Поэтому довольно трудно охватить сразу все аспекты моделирования. Внимание в нашей работе обращено моделированию с помощью дифференциальных уравнений. Модели такого типа, обладают своими достоинствами и недостатками. Таким образом, дифференциальные или разностные уравнения позволяют описывать динамику процессов в режиме реального времени.

Ключевые слова: имитационное моделирование, компьютерное моделирование в экологии, компьютерное моделирование в биологии, экомодели, приложения моделирования.

MATHEMATICAL ECOLOGICAL MODELS

G.A.RAHIMOVA

SUMMARY

Mathematical modeling in ecology has been used almost since the emergence of this science. The most complex physical processes and models help to establish certain patterns and general trends in the development of individual populations, as well as communities, and therefore it is much more difficult to adequately describe the behavior of organisms in wildlife by means of mathematics. The purpose of our work is to get acquainted with some methods of computer modeling in ecology and to prove the importance of computers in modeling ecological processes. However, mathematical (computer) modeling in ecology is a fairly extensive area of research in terms of the choice of modeling objects, the set of methods and the range of tasks to be solved. Therefore, it is quite difficult to cover all aspects of modeling at once. Attention in our work is paid to modeling using differential equations. Models of this type have their own advantages and disadvantages. Thus, differential or difference equations make it possible to describe the dynamics of processes in real time. Key words: simulation modeling, computer modeling in ecology, computer modeling in biology, eco-models, modeling applications.

Key words: simulation modeling, computer modeling in ecology, computer modeling in biology, ecomodels, modeling applications.

UDK 548.544.45**MODUL TƏDRİS TEXNOLOGİYASININ TƏTBİQİ ZAMANI
TƏLİM-TƏDRİS MÜHİTLƏRİNİN NİZAMLANMASI**

N.A.İMANOVA
Bakı Dövlət Universiteti
nermin.imanova@gmail.com

Verilmiş işdə modul texnologiyalarına əsaslanan təlim prosesi ərzində təlim - tədris mühitlərinin seçilməsi və hazırlanmasının üstünlükləri, həmçinin təlim mühitlərinin növləri və onların qurulma prinsipləri, təlim prosesində müəllim və tələbənin vəzifələri öz əksini tapmışdır.

Açar sözlər: modul tədris texnologiyası, tədris mühiti, öyrənmə fəaliyyətləri, modul qiymətləndirmə, müəllimin rolu, tələbənin rolu.

Məlum olduğu kimi, sosial inkişafın əsas mənbəyi ixtisaslı işçi qüvvəsi hazırlamaqdır. Bilikli, bacarıqlı və səmərəli işçi qüvvəsini yetişdirmək funksiyası təhsil sisteminin vəzifəsidir. Təhsil sistemi bu vəzifəni yerinə yetirərkən, elmi və texnoloji dəyişikliklər, fərdi ehtiyaclar kimi ictimai inkişafı və gözləntilər kimi bir çox amili nəzərə almalıdır. Çünki qeyd olunan bu amillər, davamlı olaraq işçi qüvvəsinin inkişafını tələb edir. Buna görə də təlim-tədris prosesindən tutmuş təhsil prosesinin hər mərhələsinə, müvafiq təhsil mühitindən fərqli tədris metodlarına qədər təhsil texnologiyasında davamlı bir inkişaf var. Elmi araşdırmalara əsaslanaraq, bu inkişaf prosesində hər zaman daha qalıcı və daha təsirli öyrənməyi təmin etmək zəruridir. Ənənəvi təhsildə yaranan problemlərin həlli və gələcək işçi qüvvəsinin daha peşəkar olması üçün modul tədris texnologiyasına keçid vacibdir.

“Modul” termini, ümumiyyətlə, bütövlüyün müəyyən edilə bilən hissəsini əhatə edən alt hissə kimi istifadə olunur. Tədrisdə modul anlayışı isə müəyyən məqsədlər daxilində müəyyən müddət ərzində məzmunun tamamlanmasına əsaslanan “bütöv” deməkdir. Modul tədris, bir-birindən müstəqil olan və müvafiq təhsil proqramı çərçivəsində mənalı bir bütünlük təşkil edən öyrənmə vahidlərinə əsaslanan bir tədris texnologiyasıdır.

Təlimin reallaşdırıldığı məkan dedikdə ətrafda yerləşdirilmiş insan qüvvəsindən kənarada olan obyektlərin qoyulan hədəflərə əsasən ən məhsul-

dar və sağlam şəkildə istifadə olunması başa düşülür. Tədris mühtləri fərdlərə ən təsirli və qalıcı öyrənməni təmin etməyə uyğun olaraq təşkil edilməlidir.

Məlumdur ki, insan oxuduqlarının 10%-ni, gördüklərinin 30%-ni, eşitdiyi və gördüyünün 50% -ni, söylədiyi və yazdığı 70%-ni, etdiklərinin isə 90%-ni xatırlayır. Tədris mühtlərinin tədris prosesi üzərində müsbət təsiri böyükdür. Ümumi olaraq, həqiqi situasiyaları və təcrübələri böyük miqyasda əks etdirən tədris mühtlərinin tələbələr üçün daha diqqət çəkən olacağı və daha fəal olacağı deyilə bilər. Bu baxımdan, tələbənin xüsusiyyətlərinə və görülməli işə uyğun mühtin nizamlanması tədris prosesinin təkmilləşdirilməsi baxımından daha müsbət nəticə verəcəkdir [1].

Tədris mühtinin nizamlanması işinin əhatə dairəsi təhsil saytlarından dərsləklərə kimi bütün fiziki məkanlar və tələbə, mütəxəssis, müəllim, idarəçi, valideyn və s. olmaqla bütün iş görənləri əhatə edən sosial mühtitə təşkil edir. Başqa sözlə, tədris mühtinin nizamlanması prosesi tələbələrdə müxtəlif sahələrə aid bilikləri aşılamaq, həmçinin təhsildə insan və ətraf mühtit əlaqələrinin bütün sahələrini əhatə etməkdir.

Əsas təlim və tədris mühtləri. Təlim və tədris mühtlərinin planlaşdırılmasında diqqət edilməsi tələb olunan əsas addımlar aşağıdakılardır:

I addım: fiziki mühtin dərslə daxilindəki modulların vəziyyətinə görə tədrisə uyğun şəkildə hazırlanması;

II addım: tədris üçün təşkil edilmiş mühtin nə vaxta kimi bu şəkildə qalacağını müəyyənləşdirilməsi.

Təlim – tədris məkanında tələbələrin yerləşmə formaları. Emalatxana, sinif və ya digər təlim-tədris məkanları, tələbələrin məhsuldar işləyə biləcəyi şəkildə aşağıda tövsiyə olunan yerləşmə formalarına görə təşkil oluna bilər.

1) “U” şəkli. Sıralar və ya stollar, məkanın ölçüləri və tələbə sayı nəzərə alınaraq, “U” şəklində yerləşdirilə bilər [6].

“U” şəklinin əsas xüsusiyyətləri aşağıdakılardır:

- ✓ Çox fərqli məqsədlər üçün istifadə oluna bilən yerləşmə formasıdır;
- ✓ Tələbələr rahat işləyə biləcəyi iş sahəsi ilə təmin edir;
- ✓ Proyektarla nümayiş olunan görüntü rahatlıqla hər kəs tərəfindən izlənilə bilər;
- ✓ Tələbələr bir – biri ilə asanlıqla üzbəüz ünsiyyət qura bilər;
- ✓ Qrup halında işlər görülməlidir.

2) Qrupla çalışma şəkli. Ellips və ya dairə şəklində olan yerləşmə formasıdır. Bu yerləşmə formasının əsas üstünlükləri aşağıdakılardır:

- ✓ Qrup halında işi asanlaşdırır;
- ✓ Qarşılıqlı oturan tələbələr bir-birilə asanlıqla əlaqə qura bilər;
- ✓ Tələbələr stullarının istiqamətini dəyişdirərək lövhəni və ya

proyektor pərdəsini asanlıqla izləyə bilirlər.

3) Konfrans şəkli. Stollar düzbucaqlı və ya kvadrat şəklində olduqda bu çox əlverişli bir yerləşmə forması olur. Bu yerləşmə forması aşağıdakı xüsusiyyətlərə malikdir:

- ✓ Bu yerləşmədə müəllimin funksiyası minimuma enir, sinifin aktivliyi ön plana çəkilir;
- ✓ Müəllimin stolun ortasında oturduğu yerləşmədə tələbələr müəllimlə daha asan ünsiyyət qura bilirlər;
- ✓ Bu yerləşmə tərzinin dezavantajı daha rəsmi bir əlaqə mühitinin yaranmasıdır.

4) Dairə şəkli. Stol olmadan sadəcə stullar istifadə olunaraq tez və asanlıqla təşkil edilə bilən yerləşmə tərzidir. Tələbələrin yazı yazacaqları və materialları qoyacaqları bir sahə lazım olduqda stullarla birlikdə masalara tərəf dönərək yerləşmə formasında dəyişiklik edilir. Bu formanın əsas xüsusiyyətləri aşağıdakılardır:

- ✓ Stollar olmadan da sadəcə stullar istifadə olunaraq tez və asanlıqla təşkil edilir;
- ✓ Qrup daxilində diskussiyalar üçün ideal bir yerləşmə şəklidir;
- ✓ Dərs daxilində bir neçə dəfə qısa müddətli diskussiya qrupları yaradıldıqdan sonra əvvəlki vəziyyətə asanlıqla qaytarıla bilər.

5) Klassik sinif yerləşməsi. Təvsiyə olunan yerləşmə tərzləri emalatxana və ya siniflərin böyüklüyü, avadanlıq, tələbə sayının çoxluğu kimi məhdudiyyətlər səbəbindən tətbiq oluna bilmirsə klassik emalatxana və ya sinif yerləşmə tərzini tətbiq oluna bilər. Bu mühitlərdə tələbələrin daha da aktiv olması üçün müxtəlif təvsiyələr tətbiq edilə bilər.

6) Qrupların ayrılması. Mübahisə edən və müşahidə edən olmaqla fərqli qrupların təşkil edilməsi formasıdır.

- ✓ Bu yerləşmə tərzini, mübahisə və ya qrup işlərini izləmək kimi fəaliyyətlərdə istifadə oluna bilər;
- ✓ Ən çox tətbiq olunan forması ortada birləşdirilən masaların əhatəsində 2 qrupun və digər kənarlara qrup işlərini müşahidə edəcək qrupların yerləşdirilməsidir.

7) "İş dayanacağı". Aktiv laboratoriya işləri üçün uyğun bir yerləşmə şəklidir. Dayanacaq adlandırılan sahənin ətrafına 2 tələbə yerləşdirilir. Müəllim nələrin edilməsini praktiki olaraq göstərdikdən sonra tələbələr bir – biri ilə əməkdaşlıq edərək iş görürlər [7].

8) Layihə və xüsusi iş qrupları. Geniş bir sahədə yaradılan fərqli iş qruplarıdır.

- ✓ Bu yerləşmə olduqca böyük sahəsi olan məkanlar üçün və ya iclas zallarında tətbiq edilə biləcək bir yerləşmədir;
- ✓ Dərstdən kənar fəaliyyətlər üçün də istifadə oluna bilər;

- ✓ Qrup layihələrinin hazırlanaraq mübahisəyə açılacağı işlər üçün ideal bir yerləşmə formasıdır.

9) Virtual öyrənmə (İnternet üzərindən e – təlim) mühitləri. Biliklərin tam şəkildə və ya bir qisminin tələbələr tərəfindən şəbəkə və ya internetdən əldə edildiyi öyrənmə mühitidir. Texnoloji avadanlıqlara əsaslanan öyrənmə metodlarını tələb edən bu öyrənmə mühitləri hazırkı dövrdə getdikcə daha da yayılmaqda və maraqla qarşılanmaqdadır [2].

Məktəbdə virtual sinif mühiti yaradıla bildiyi kimi, kompüter avadanlıqları ilə fərdi e – təlim şəraiti təmin edilərək İnternetdə təlim-tədris fəaliyyətlərinin tətbiq olunması yolu ilə də təlim və tədris reallaşdırıla bilər. Virtual öyrənmə mühitləri, tələbələrin vaxtlarını daha yaxşı istifadə edəcəyi, məlumat axtarmaq yerinə diqqətlərini biliyə yönəldəcəkləri və analiz, sintez və dəyərləndirmə səviyyəsində düşüncələrini dəstəkləyən tərzdə formalaşdırılmalıdır.

Öyrənmə mühitində müəllim və tələbənin dəyişən rolları

Müəllimin rolu. Tələbələrin müstəqil şəkildə öyrənmə qabiliyyətlərini artırmaq hədəfi, müəllimin vəzifələrinin daha fərqli və adekvat olmağını tələb edir. Hər modula uyğun hazırlıqlar tələbəyə təqdim olunmazdan əvvəl tamamlanmalıdır.

Müəllimin öyrənmə prosesi üçün 2 vacib sualı əvvəlcədən araşdırması lazımdır:

1. Tələbələr öyrənmə fəaliyyətlərini müstəqil olaraq reallaşdırmağa nə qədər maraqlıdırlar və bu fəaliyyətlərinin nə qədərini öhdəsindən gələ bilirlər?
2. Tələbələrin müstəqil öyrənmə qabiliyyətini təkmilləşdirmək üçün nə cür və hansı dərəcədə xarici nəzarət lazımdır?

Müəllim həm mütəxəssis kimi davranmalı, həm də öyrənmə proseslərinin hər bir modul fəaliyyətinə uyğun şəkildə tənzimləyicisi olmalıdır.

Müəllimin yeni bir tədris mühiti təşkil etməsi ilə əlaqədar vəzifələri aşağıdakı kimi göstərilə bilər:

1. **“İnformasiya təminatçısı” funksiyası.** Müəllim, tələbələrini modulun öyrənilməsinə istiqamətləndirir. Öyrənmə prosesi ilə əlaqədar olaraq tələbələrə, təlim hədəfləri və iş metodu haqqında açıqlama verərək dəstək olur. Öyrənmə müddəti və tələbənin müəyyən tapşırıqları təqdim etməsi üçün lazım olan vaxtlar haqqında məlumat verir. Müəllim tədris prosesində tələbələrin üzərinə düşən vəzifələrin müstəqil şəkildə tətbiq olunması üçün onların kifayət qədər məlumatlı olub-olmadığına nəzarət edir. Müəllim proqram üzrə dərs və məsləhət saatları, təqdim olunacaq sənəd və ya icra ediləcək testləri qabaqcadan bildirir.
2. **“Mütəxəssis və rəhbər” funksiyası.** Müəllim bir mütəxəssis olmaqla bərabər, həmçinin kömək edən bir ustadır. Öyrənmə prosesinin reallaş-

dırılmasında tələbəni dəstəkləyən və öyrənmə fəaliyyətləri haqqında tədqiqat aparan bir məsləhətçidir. Tələbələrdən gözlənilən nəticələrin nələr olduğunu aydın şəkildə ifadə edir. Öz vəzifələri və tələbənin məsuliyyətinin nə olduğunu açıqlayır. Tələbə ilə lazımi iş və yoxlama-nəzarət əlaqəsi qurur. Müəllimin tapşırıqları və tələbənin özünün cavabdeh olduğu tədris tapşırıqlarını bir-birindən ayırır. Tələbələrin işləmə metodunu müşahidə edir və öyrənməsini təkmilləşdirmək üçün kömək edir.

3. *“Asanlaşdırıcı” funksiya.* Müəllim tələbələrin informasiya əldə etməsində düzgün tədris vasitələrinə malik olub-olmadıqlarını və bu vasitələrin düzgün tətbiq olunub olunmadığını araşdırır, lazım gəldikdə mühit və yaxud avadanlıqlar haqqında əlavə informasiya verir. Tələbələrin yeni mühit və avadanlıq haqqında nə qədər məlumatlı olduqlarını araşdırır. Modul üçün lazım olan elektron tədris materiallarının olub-olmadığını və verilib-verilməyəcəyini yoxlayır.
4. *“Keyfiyyət monitoru” funksiyası.* Müəllim tədris nəzarətçisi olaraq tədris prosesini daimi olaraq qiymətləndirir. Tədris müddəti ərzində təhsil keyfiyyətini yüksəltmək məqsədilə mütəmadi olaraq tədris mühitinin uyğun vəziyyətə gətirilməsi və yaxşılaşdırılması üzərində işləyir. Tədris şərtləri və çatışmazlıqları müşahidə edir.
5. *“Təlim prosesi monitoru” funksiyası.* Nəzarət edən müəllim tələbənin irəliləməsini mütəmadi izləyir və bunu tələbə ilə əlaqədar məlumat və rəqlərində qeyd edir. Tədrisin nəticələrini, qeydləri və qiymətləndirməni daimi müşahidə edir [3].

Tələbənin rolu. Tələbənin özünün tədris prosesi ilə əlaqədar məsuliyyəti artır. Öz öyrənmə mühitini özü təşkil edir və tədris prosesinə getdikcə daha çox nəzarət edir. Tələbə tədris prosesində müvəffəqiyyətli olması üçün aşağıdakı suallar üzərində araşdırma aparmalıdır: [8]

- ✓ təlim komponentlərinin öhdəsindən özü sərbəst şəkildə və ya başqaları ilə birlikdə necə gələ bilər?
- ✓ tədris fəaliyyətini necə planlaşdırmalıdır?
- ✓ Öyrənməklə əlaqədar problemləri və sualları necə formalaşdırmalıdır?
- ✓ haradan və kimdən rəy almalıdır?
- ✓ hələ də öhdəsindən gələ bilmədiyi hansı problemlər var?
- ✓ öyrənmə prosesini növbəti mərhələ üçün necə təkmilləşdirə bilər?

Tələbə və müəllim arasında interaktiv əlaqə. Tədris prosesinin təkmilləşdirilməsi, tələbənin çatışmazlıqlarının öhdəsindən daha asanlıqla gələ bilməsi üçün müəllim və tələbə arasında daimi əlaqə qurulmalıdır. Müəllim tələbəyə aşağıdakı tövsiyələri verib müzakirə edərək ona köməkçi olmalıdır:

- ✓ modulun öyrənilməsi üçün zəruri olan bütün tədris vasitələrinə sahib olub-olmadığından əmin olmaq;

- ✓ vaxtı düzgün bölmək;
- ✓ tədris prosesi ərzində modulları zaman üzrə düzgün şəkildə bölüşdürmək;
- ✓ tədris mühitini bütün modullar üçün hazırlamaq;
- ✓ işləmə mühitini seçmək;
- ✓ çatışmazlıqların işə əngəl olmasına şərait yaratmamaq;
- ✓ elektron tədris vəsaitləri haqqında qabaqcadan məlumat toplamaq;
- ✓ sosial tədris mühiti planlamaq;
- ✓ kömək və rəhbərlik imkanlarını müəyyənləşdirmək.

Tələbə nələr üçün əlavə kömək və rəhbərlik ehtiyacı duyacağını qabaqcadan müəyyənləşdirməlidir. Müvafiq modul ilə əlaqədar imkanlar seçdiyini mühitlə əlaqəli olmalıdır. Modulların üzərində tək və ya qrup şəklində işləməyə əvvəlcədən qərar verərək tədris mühitini buna görə hazırlamalıdır. Kömək lazım gəldiyində kimlərlə məsləhətləşə biləcəyini müəyyənləşdirməlidir.

ƏDƏBİYYAT

1. Bilgin İ. ve Durmuş S. (2003). Öğrenme stilleri ile öğrenci başarısı arasındaki ilişki üzerine karşılaştırmalı bir araştırma. Kuramdan Uygulamaya Eğitim Bilimleri Dergisi, 3(2): 381-393.
2. Fer, S. (2000). Modüler Program Yaklaşımı ve Bir Öneri. Milli Eğitim Dergisi, 147: 21-37, ISSN 1301-7669.
3. Grasha A. F. (2002). Teaching With Style, A Practical Guide to Enhancing Learning by Understanding Teaching and Learning Style, U.S.A.
4. Gürol, M. (2005). Oluşturmacı öğrenme yaklaşımının uzmanlaşmaya etkisi. The Turkish Online Journal of Educational Technology – TOJET, 4(1): 141-145.
5. MEGEP (2006). Öğretim Programları ve Modüler Öğretim Uygulama Kılavuzu. Ocak, Ankara.
6. Özkan H.H. (2005). İşbirliğine dayalı öğrenme ve modüler öğretim yöntemlerinin birlikte uygulanmasının akademik başarıya etkisi. 5- 7 Eylül 2005 İstanbul, 1. Uluslar arası Mesleki ve Teknik Eğitim Teknolojileri Kongresinde sunulmuş bildiri.
7. Yazıcı, H.J. (2005). A study of collaborative learning style and team learning performance. Journal of Education and Training, 47(3), 216-229.
8. Adıgüzel O.C. (2007) Mesleki ve Teknik Ortaöğretim. M. Sağlam (Edt.), Türk Eğitim Tarihi içinde (ss. 153-176). Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayını.

КОРРЕКТИРОВАНИЕ (РЕГУЛИРОВАНИЕ) УЧЕБНОЙ СРЕДЫ ВО ВРЕМЯ ПРИМЕНЕНИЯ МОДУЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ

Н.А.ИМАНОВА

РЕЗЮМЕ

В данной работе во время учебной среды на основе модульной технологии преимущества выбора и подготовки обучающей среды обучения, а также виды обучающей среды и их принципы построения нашли свое отражение обязанности преподавателя и студента.

Ключевые слова: модульная технология обучения, среда обучения, учебная деятельность, модульное оценивание, роль учителя, роль ученика.

TRAINING - REGULATION OF LEARNING ENVIRONMENT DURING THE APPLICATION OF MODULAR TEACHING TECHNOLOGY

N.A.IMANOVA

SUMMARY

This paper reflects the advantages of selecting and developing learning environments during the learning process based on modular technologies, as well as the types of learning environments and the principles of their construction, the responsibilities of teachers and students in the learning process.

Key word: modular teaching technology, learning environment, learning activities, modular assessment, the role of the teacher, the role of the student.

FİZİKA

PACS: 75.10.Jm, 78.30.-j.

INTERBAND ELECTRON RAMAN SCATTERING
IN $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ IN QUANTIZED MAGNETIC FIELD

T.H.ISMAYILOV*, S.I.ZEYNALOVA**

**Baku State University, ** Institute of Physics of the Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Baku State University
tariyel.i@gmail.com, sebine-zeynalova@mail.ru*

The interband electron Raman scattering of light in a quantizing magnetic field in the inverse band of the crystal $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ ($x < 0.15$) is considered. The differential effective cross section of scattering is calculated. Possible processes are determined in specific cases of polarization of incident and scattered light. Estimates are made and it is shown that the effective cross section of the spin conversion process exceeds by several orders of magnitude the effective cross section of all possible Raman scattering processes in a quantizing magnetic field in "normal" semiconductors.

Keywords: Electron Raman scattering, $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$, quantized magnetic field, inverse band structure, spin-flip scattering

Raman scattering of light (RS radiation) from electronic excitations in semimetals and semiconductors provides valuable information about their band structure and electronic properties. It is known [1-3] that the ERS spectrum essentially depends on the band structure of the substance. Based on the location of the initial and final states, two types of ERS are distinguished: intraband (when the initial and final states are in the same band) and interband (when the initial and final states are in different bands).

Interband ERS (IERS) in gapless semiconductors in the absence of a magnetic field was first considered in [4], where the authors limited themselves to the parabolic approximation ($\varepsilon_g \rightarrow \infty$, ε_g - is the distance between the bottom of the conduction band and the top of the light hole band). In [5], nonparabolicity was taken into account both in the spectrum and in the wave functions.

In this paper, we consider the problem of IERS in a quantizing magnetic field using the example of, $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ in connection with the problem of stimulated ERS with frequency tuning. The band structure of this compound in the absence of a magnetic field ($H=0$) is shown in Figure 1. The same figure shows the only possible IERS process at $T=0$. Under the action of laser radiation (pumping), an electron is excited from the zone of light holes (band a) into the conduction band (c). In the second act, an electron from the zone of heavy holes “drops” into the hole formed in the zone of light electrons. The overall process is reduced to the fact that the electron, as if, passes from the zone of heavy holes to the conduction band, i.e. from the initial state in the heavy hole band to the final state in the conduction band. We designated the conduction band, heavy and light holes bands as c, b, and a, respectively. When a strong (quantizing magnetic field) is applied, the c, b, and a bands are quantized (i.e., Landau levels appear), a gap is formed between the c and b bands, and the “distance” between the bottom of the conduction band and the top of the light hole band increases [4].

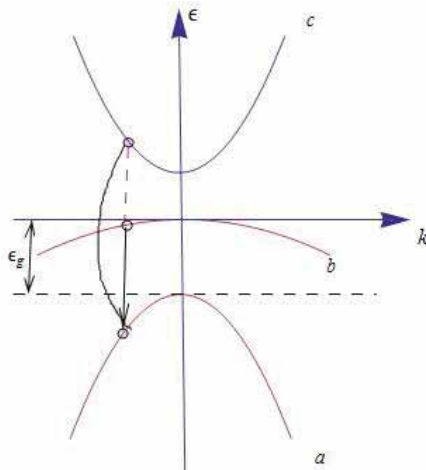
The states of electrons in the bands are given by the full set of quantum numbers $\alpha \rightarrow (n, k_x, k_y, \sigma)$, where n - is the Landau level number, k_x, k_y are the components of the electron wave vector, $\sigma = \pm 1$ (or \uparrow, \downarrow) is the spin quantum number.

We will proceed from the general expression for the differential effective cross section of the ERS [6, 7]

$$\frac{d^2S}{d\Omega d\omega} = r_0^2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \sum_{i,f} |A_{fi}|^2 \hbar \delta(\hbar\omega - E_f + E_i) \quad (1)$$

where

$$A_{fi} = \frac{1}{m_0} \sum_r \left[\frac{\langle f | \vec{\varepsilon}_1 \vec{p} | r \rangle \langle r | \vec{\varepsilon}_0 \vec{p} | i \rangle}{E_i - E_r + \hbar\omega_0} + \frac{\langle f | \vec{\varepsilon}_0 \vec{p} | r \rangle \langle r | \vec{\varepsilon}_1 \vec{p} | i \rangle}{E_i - E_r - \hbar\omega_1} \right] \quad (2)$$



Here, $r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2}$ - the classical radius of the electron, \vec{p} - the momentum of the electron in the crystal, $i, f, r,$ - indicate the initial, final and intermediate states of the electron, ω_0, ω_1 - the frequencies of the incident and scattered radiation, $\vec{\varepsilon}_0, \vec{\varepsilon}_1$ - the corresponding polarizations, $\omega = \omega_0 - \omega_1$ - the displacement frequency, E_i, E_f, E_r - the energies of the initial, final and intermediate states electron.

To calculate the differential effective cross section of the ERS, it is necessary to know the explicit form of the wave functions and the spectrum. In [8], the wave functions for the conduction band, the bands of light and heavy holes are presented in the case of a “normal” semiconductor of the InSb type. From these wave functions, taking into account the inversion of the conduction band and the band of light and holes in $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ ($x < 0.15$) with respect to the corresponding bands in InSb, one can obtain wave functions for the inverse band structure. Using the found wave functions, we calculated the differential effective scattering cross section in the parabolic approximation ($\varepsilon_g \rightarrow \infty$). In this case, it was assumed that the energies of the states in the band of heavy holes are $\varepsilon_{nb\uparrow\downarrow}(k_z) \equiv 0$, thus we neglected the order terms m_c^*/m_b^* . Such neglect is quite justified, since in the material under consideration $m_c^* \ll m_b^*$.

As a result of the calculations, it turned out that IERS processes are possible both without and with spin flip at $\Delta n = 0, \pm 1, \pm 2$ (Δn - is the change in the Landau level number) and at different polarizations of the incident and scattered light. In the general case, the expression for the differential effective cross section is cumbersome. Therefore, we present here only formulas for specific polarizations and scattered light.

If the incident light is polarized along the left $\vec{\varepsilon}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y)$, and the scattered light is polarized along the right $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y)$, then the following processes take place:

- a) $\Delta n = +2, \Delta\sigma = 0, n_{b\uparrow} \rightarrow n_{c\uparrow}$,
- b) $\Delta n = +2, \Delta\sigma = 0, n_{b\downarrow} \rightarrow n_{c\downarrow}$,
- c) $\Delta n = +1, \Delta\sigma = +1, n_{b\downarrow} \rightarrow n_{c\uparrow}$

In the following expressions for processes a), b), c), $k_n^2 = \frac{2m_c^*}{\hbar^2} [\hbar\omega - (n + \Delta n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4})\hbar\omega_c]$ where the sign (+) is taken for the transition of the electron to the final state with spin \uparrow , and (-) for the transition state

with spin \downarrow .

a) In this case, the expression for the DCS is:

$$\frac{d^2S}{d\Omega d\omega} = \frac{27r_c^2 s^2 (\omega_0 - \omega)}{256\pi^2 \omega_0 \omega} \sum_n \frac{C_n^2}{k_n} \cdot \frac{s^2 n(n+1)(n+2)}{[2k_n^2 + s(s+1)]^2} |B+B'|^2 \quad (3)$$

$$s = \frac{eH}{\hbar c}, \quad r_c = \frac{e^2}{m_c^* c^2}, \quad C_{n\uparrow}^2 = \frac{2k_n^2 + sn}{2k_n^2 + s(4n+3)},$$

$$B = \frac{\omega_g}{2\omega + \omega_g - \omega_0 - \omega_c}, \quad B' = \frac{\omega_g}{2\omega + \omega_g + \omega_0 - \omega_c}, \quad \omega_g = \frac{\varepsilon_g}{\hbar}, \quad \omega_c = \frac{eH}{m_c^* c}$$

In the case of $\omega_0 < \omega_g$, as can be seen from (3), oscillations occur due to the density of the final states. In the experiment at low frequencies $\omega \ll \omega_0$ they should be clearly observed. At large ω , due to the fact that the factor $(\omega_0 - \omega)/\omega$ tends to zero, as well as $B, B' \ll 1$, these oscillations are suppressed. If $\omega_0 > \omega_g$, oscillations appear at low frequencies associated with transitions to discrete Landau levels, which gradually disappear with increasing ω , and resonance occurs at a certain frequency:

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_g + \omega_c) \quad (4)$$

In the absence of a magnetic field ($H = 0 \Rightarrow \omega_c = 0$), the resonance sets in at $\omega = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_g)$ [2]. The magnetic field for this process shifts the resonance point by the amount of $\omega = \frac{1}{2}\omega_c$ towards higher frequencies.

b) The expression for DCS in this case is:

$$\frac{d^2S}{d\Omega d\omega} = \frac{3r_c^2 s^2 (\omega_0 - \omega)}{256\pi^2 \omega_0 \omega} \sum_n \frac{C_{n\downarrow}^2}{k_n} \cdot (n+2) |B+B'|^2 \quad (5)$$

This expression is similar to formula (3). In the region of low frequencies, both in the resonant and nonresonant cases, oscillations dominate, which are gradually suppressed for the above reasons. When $\omega_0 > \omega_g$ resonance occurs at the same frequency as in process a).

c) In this case, the DCS has the form:

$$\frac{d^2S}{d\Omega d\omega} = \frac{3r_c^2 s^2 (\omega_0 - \omega)}{128\pi^2 \omega_0 \omega} \sum_n k_n C_{n\downarrow}^2 \left[D' + D + \frac{3(n+1)}{n} \gamma(n) (B+B') \right]^2 \quad (6)$$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{B} + \frac{1}{2} \frac{\omega_c}{\omega_g}, \quad \frac{1}{D'} = \frac{1}{B'} + \frac{1}{2} \frac{\omega_c}{\omega_g}, \quad \gamma(n) = \frac{sn}{2k_n^2 + sn}$$

This process is qualitatively different from the previous two. This is a

spin flip process.

At $\omega = \left(n+1 + \frac{1}{4}\right)\omega_c$, DCS $\frac{d^2S}{d\Omega d\omega} = 0$. When $\omega_0 < \omega_g$ in the region of low frequencies, the cross section first increases, then reaching a maximum at $2\omega_c\left(n+1 + \frac{1}{4}\right)$, it begins to decrease to zero.

When $\omega_0 > \omega_g$ at low frequencies, the cross section behaves as in the case of $\omega_0 < \omega_g$, and at high frequencies there are $\omega = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_g + \omega_c)$ resonances, which coincides with the resonances a) and b) and $\omega = \frac{1}{2}\left(\omega_0 - \omega_g + \frac{1}{2}\omega_c\right)$, shifted to the right by the amount of $\frac{1}{4}\omega_c$ relative to the previous ones.

If $m_c^* = 0.035m_0$, $H = 10^5$ E, $n=-1$, $\omega = \frac{1}{2}\omega_c$ then for the nonresonant case at the maximum we have $\frac{d^2S}{d\Omega d\omega} \approx 2 \cdot 10^{-21} sm^{-1}s \cdot sr^{-1}$, which is several orders of magnitude greater than the cross sections of all processes in normal semiconductors in quantizing magnetic fields [9-12].

REFERENCE

1. Ri. Betancourt-Riera, Re. Betancourt-Riera, L.A. Ferrer-Moreno, J.M. Nieto Jalil. Intraband Raman scattering and gain in a double quantum well wire with asymmetrical barriers, *Physica B*, 600, (2021) 412640 .
2. A. V. Rodina and E. L. Ivchenko. Theory of single and double electron spin-flip Raman scattering in semiconductor nanoplatelets, *PHYSICAL REVIEW B* 102, 235432 (2020).
3. Ri. Betancourt-Riera, Re. Betancourt-Riera, L.A. Ferrer-Moreno, A.D. Sañu-Ginarte. Theory of electron Raman scattering in a semiconductor core/shell quantum well wire, *Physica B: Physics of Condensed Matter* (2019), doi: 10.1016/j.physb.2019.04.004
4. Burstein E. Miils D.L., Wallis R.F., *Phys Rev.*, B4, 1971, 2429
5. Гашидзе Ф.М., Мехтиева М.А., Исмаилов Т.Г. *Изв.АН.Азерб. ССР, серия физ-техн. И матем. Наук.*, 1977, N4.
6. Гайтлер В. *Квантовая теория излучения*. М., Изд-во иностр.лит 1956
7. Jha S.S. *Nieovo Cimento*, B1, 1969, 331.
8. Kowalski I., and Zawadski W., *Sol.State Comm.*, 13, 1973, 433
9. Yafet Y. *Phys. Rev.*, 152 ,(1966) 858;
10. Wolf P.A. *Phys.Rev Lett.*, 16, 1966, 225.
11. Kelley P.L and Wright G.B. *Bull.Amer.Phys.Soc.*, 6, 1966, 813
12. Макаров В.И. *ЖЭТФ*, 55, 1968, 704.

KVANTLAYICI MAQNİT SAHƏSİNDƏ Hg_{1-x}Cd_xTe-DA ELEKTRON RAMAN SƏPİLMƏSİ

T.H.İSMAYİLOV, S.İ.ZEYNALOVA

XÜLASƏ

İnvers zonalı Hg_{1-x}Cd_xTe ($x < 0.15$) kristalında kvantlayıcı maqnit sahəsində zonalar-arası Raman səpilməsi məsələsinə baxılmışdır. Səpilmənin diferensial effektiv kəsiyi hesablanmışdır. Düşən və səpilən işığın konkret polarizasiya hallarında mümkün olan proseslər müəyyənləşdirilmişdir.

Qiymətləndirmələr aparılmış və göstərilmişdir ki, spinin çevrilməsi ilə gedən prosesin effektiv kəsiyinin tərtibi “normal” yarımkeçiricilərdə kvantlayıcı maqnit sahəsində mümkün Raman səpilməsi proseslərin effektiv kəsiklərinin qiymətindən bir neçə tərtib böyükdür.

Açar sözlər: Elektron Raman səpilməsi, Hg_{1-x}Cd_xTe, kvantlanmış maqnit sahəsi, tərs çevrilmiş zona quruluşu, spin-flip səpilməsi.

МЕЖЗОННОЕ ЭЛЕКТРОННОЕ РАМАН РАССЕЙНИЕ В Hg_{1-x}Cd_xTe В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

T.Г.ИСМАИЛОВ, С.И.ЗЕЙНАЛОВА

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено межзонное электронное Раман рассеяние света (ЭРС) в квантующем магнитном поле в кристалле Hg_{1-x}Cd_xTe ($x < 0,15$) с инверсной зонной структурой.

Рассчитано дифференциальное эффективное сечение рассеяния. Определены возможные процессы в конкретных случаях поляризации падающего и рассеянного света. Сделаны оценки и показано, что эффективное сечение процесса с переворотом спином (спин-флип) на несколько порядков превышает эффективное сечение всех возможных процессов ЭРС в квантующем магнитном поле в полупроводниках с нормальной зонной структурой.

Ключевые слова: Электронное Раман рассеяние, Hg_{1-x}Cd_xTe, квантующее магнитное поле, инверсная зонная структура, рассеяние с переворотом спина.

УДК 538.958

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ И ФОТОПРОВОДИМОСТЬ В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ GaSe/InSe ПРИ ЛАЗЕРНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Р.М.МАМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет
rovshan63@rambler.ru

Экспериментально исследованы люминесценция и фотопроводимость тонких пленок GaSe, InSe и гетероперехода GaSe/InSe при возбуждении излучениями импульсного Nd:YAG-лазера со встроенными генераторами 2-й и 3-й гармоник, предназначенный для генерации излучения с длиной волны 1064, 532 и 335 нм. Показано, что рекомбинационное излучение наблюдаемые в спектрах люминесценции гетероперехода GaSe/InSe, по-видимому, связано со свободными экситонами. Исследования кривых релаксаций фототока в системе GaSe/InSe, показывает наличие у них быстрого канала рекомбинации и энергетического барьера для неравновесных носителей, генерированных лазерным излучением.

Ключевые слова: гетеропереход GaSe/InSe, лазер, люминесценция, фотопроводимость.

1. Введение

Слоистые полупроводники селенид галлия (GaSe) и индия (InSe) в последнее время стали предметом интенсивных научных исследований. Ионно-ковалентная связь между атомами в слоях и слабое Ван-дер-ваальсовское взаимодействие между ними обуславливают сильную анизотропию их физических свойств и являются основной причиной наблюдения ряда эффектов, несвойственных другим анизотропным полупроводникам. Наряду с нелинейными явлениями, ранее обнаруженными в этих веществах при высоких уровнях оптического возбуждения [1-7], кристаллы GaSe и InSe в настоящее время являются весьма перспективными материалами для их использования в сверхтонкой и сверхбыстродействующей электронике [8-21]. Экспериментальное исследование люминесцентных и фотоэлектрических явлений в гетеропереходах GaSe/InSe, возбуждаемых сверхвысокими световыми

потоками, позволяет широко применять эти гетеропереходы в оптоэлектронике.

В данной работе представлены экспериментальные результаты получения тонких пленок GaSe, InSe и гетероперехода GaSe/InSe и исследований их оптических и фотолюминесцентных характеристик при лазерном возбуждении.

2. Методика эксперимента

Кристаллы GaSe и InSe были выращены методом Бриджмена. Так как эти кристаллы имеют слоистую структуру, то удалось получить очень тонкие монокристаллические пластинки путем отщепления их от толстых образцов. При этом сразу получались зеркальные оптические поверхности, не требующие специальной полировки. Толщина исследуемых образцов была от долей микрона до 2-4 микрон. Гетероструктура GaSe/InSe получалась путем дискретного испарения в вакууме кристаллов GaSe на подложку из InSe. Размеры кристаллических подложек составляли $10 \times 6 \times 0.5 \text{ мм}^3$.

В качестве источника излучения использовался импульсный Nd:YAG-лазер со встроенными генераторами 2-й и 3-й гармоник, предназначенный для генерации излучения с длиной волны 1064, 532 и 335 нм. Длительность лазерного импульса составляла 10 нс с максимальной мощностью $\sim 12 \text{ МВт/см}^2$. Интенсивность излучения изменялась при помощи калиброванных нейтральных световых фильтров. С помощью линзы падающий лазерный луч фокусировался на поверхность образца с диаметром пятна $\sim 2.0 \text{ мм}$. Спектры люминесценции тонких пленок GaSe, InSe и гетероструктур GaSe/InSe исследовались с использованием автоматического монохроматора M833 с двойной дисперсией (спектральное разрешение $\sim 0,024 \text{ нм}$ на длине волны 600 нм), с компьютерным управлением и детектором, регистрирующим излучение в диапазоне длин волн 350-2000 нм. Регистрация импульсов фотопроводимости производилась по методике позволяющей записывать на экране запоминающего осциллографа (Le Croy 9400) одиночные наносекундные импульсы [22].

3. Экспериментальные результаты и их обсуждение

На рисунке 1, а, б представлены спектры фотолюминесценции GaSe и InSe, возбуждаемые лазерным светом с энергией $\hbar\omega = 2,34 \text{ эВ}$. По-нашему мнению максимум излучения соответствующий длине волны $\lambda = 606 \text{ нм}$, связан с излучательной рекомбинацией свободных экситонов в GaSe [23, 24]. Об этом свидетельствует наличие узкой поло-

сы излучение с полушириной около 2,5 нм и расположение этой линии излучения от края полосы поглощения на 0,02 эВ в сторону низких энергий, что соответствует энергии связи свободных экситонов в GaSe. Наблюдение интенсивного излучения с максимумом $\lambda = 1083$ нм в инфракрасной области спектра, по-видимому, обусловлено аннигиляцией свободных экситонов в InSe, с энергией связи ~ 25 мэВ.

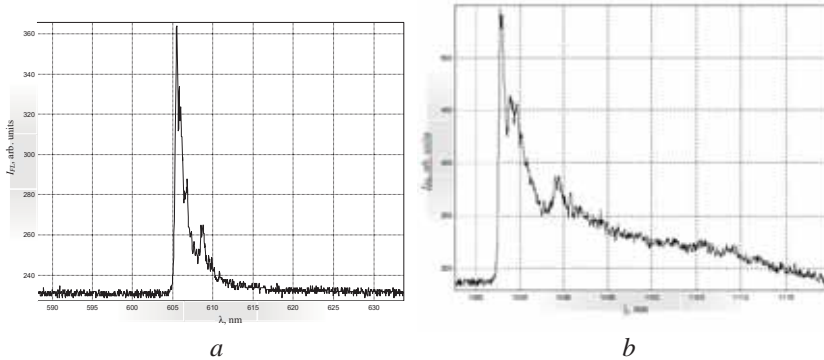


Рис.1. Спектры фотолуминесценции GaSe (a) и InSe (b), возбуждаемой лазерным светом с энергией $\hbar\omega = 2,34$ эВ.

Представляет особый интерес исследование спектров фотолуминесценции гетероперехода p-GaSe/n-InSe при возбуждении 1-ой и 2-ой гармоникой импульсами Nd:YAG-лазера. Дело в том, что при возбуждении 1-ой гармоникой Nd:YAG-лазера, энергия лазерного излучения ($\hbar\omega = 1.17$ эВ) оказывается меньше, чем ширина запрещенной зоны наночастиц GaSe ($E_g = 2.07$ эВ). При освещении системы p-GaSe/n-InSe со стороны GaSe (широкозонное окно) при высоких интенсивностях возбуждения с энергией кванта $\hbar\omega < E_g$, может иметь место двухфотонное поглощение. Известно, что коэффициент однофотонного поглощения у края собственного поглощения GaSe $\alpha \sim 10^3$ см⁻¹, тогда как при двухфотонном поглощении $\alpha \sim 10^{-2}$ см⁻¹ [25-27]. Поэтому из-за малости коэффициента двухфотонного поглощения, возможно создание значительной концентрации электронно-дырочных пар в большом объеме исследуемого вещества. Исследование рекомбинационного излучения, возникающего при таком способе создания неравновесных носителей, представляет значительный интерес ввиду того, что люминесценция в этом случае идет из всего объема полупроводника и поверхностные явления не сказываются на наблюдаемых закономерностях. С другой стороны такой метод возбуждения адекватно отражает процессы излучательной рекомбинации, протекающие в объеме гетероперехода p-GaSe/n-InSe.

На рисунке 2 представлены спектры фотолюминесценции системы p-GaSe/n-InSe, возбуждаемые 1-ой гармоникой Nd:YAG-лазера ($\lambda = 1060$ нм). Как видно из рисунка, спектр излучения охватывает довольно широкий диапазон длин волн 590 – 1100 нм. Сравнение линий излучения, связанных с GaSe ($\lambda = 606$ нм) и InSe ($\lambda = 1097$ нм), показывает, что интенсивности линии излучения GaSe на два порядка меньше интенсивности излучения InSe, что является прямым доказательством наличие двухфотонного поглощение в GaSe при высоких уровнях возбуждения.

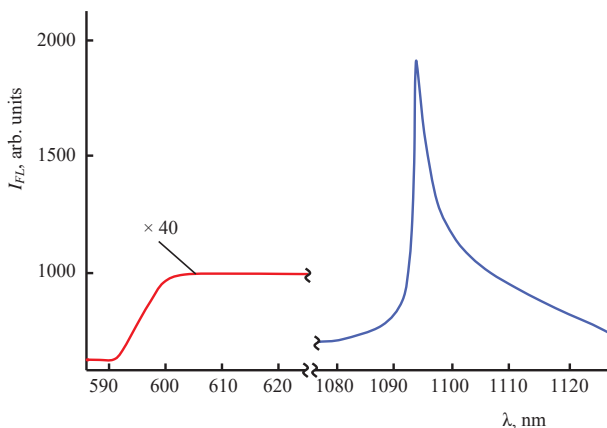


Рис. 2. Спектр фотолюминесценции гетероперехода p-GaSe/n-InSe возбуждаемой 1-ой гармоникой Nd:YAG-лазера.

На рисунке 3 представлены спектры фотолюминесценции системы p-GaSe/n-InSe, возбуждаемые 2-ой гармоникой Nd:YAG-лазера ($\lambda = 535$ нм). Как видно из рисунка, если не учитывать незначительный сдвиг спектра излучения, положение максимумов остается таким же, как в случае возбуждения 1-ой гармоникой Nd:YAG-лазера. Однако в этом случае из-за сильного поглощения в области GaSe, интенсивность излучения оказывается \sim в 4 раза больше по сравнению с излучением в области InSe. Таким образом, применяя методы возбуждения первой и второй гармоникой Nd:YAG-лазера, можно менять интенсивность излучения, принадлежащей разным компонентам гетероперехода p-GaSe/n-InSe. Проведенные эксперименты показывает, что кроме экситонных пиков излучения, в гетеропереходах p-GaSe/n-InSe, при возбуждении 1-ой гармоникой лазерного излучения не обнаружены излучения, связанные с дефектами, дислокациями или другими неоднородностями, обычно встречающимися в широкозонных полупроводниках.

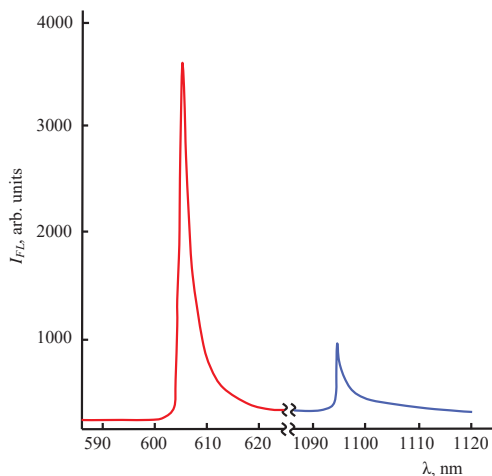


Рис. 3. Спектр фотолюминесценции гетероперехода p-GaSe/n-InSe возбуждаемой 2-ой гармоникой Nd:YAG-лазера.

Характерными особенностями обладают кривые релаксации фототока системы p-GaSe/n-InSe при возбуждении 1-ой и 2-ой гармоникой лазера (рис.4). При возбуждении второй гармоникой лазерного излучения время релаксации составляет 1,5 мкс (рис.4,*a*). Такой быстрый спад фототока, по-видимому, обусловлено наличием быстрого канала рекомбинации в GaSe [30]. Однако кривые релаксации фототока при возбуждении 1-ой гармоникой лазерного излучения значительно отличается от кривых, наблюдаемых при возбуждении 2-ой гармоникой лазерного излучения (рис. 4,*b*). В этом случае время релаксации намного (более 20 мкс) превышает величину при возбуждении излучением кванта с энергией 2.34 эВ. По-нашему мнению такое поведение в первую очередь обусловлено объемным возбуждением исследуемых систем. Вовторых, необходимо учесть, что в слоистых кристаллах типа GaSe наличие дефектов упаковки приводят к локализации электронных волновых функций в направлении перпендикулярном слоям [24, 30]. Эта локализация электронных волновых функции в GaSe скорее всего происходит на наивысшей вершине валентной зоны и наинизшем дне зоны проводимости. Это обстоятельство приводит к тому, что неосновные носители, генерированные лазерным излучением должны преодолеть потенциальный барьер величиной $\sim (50-100)$ мэВ.

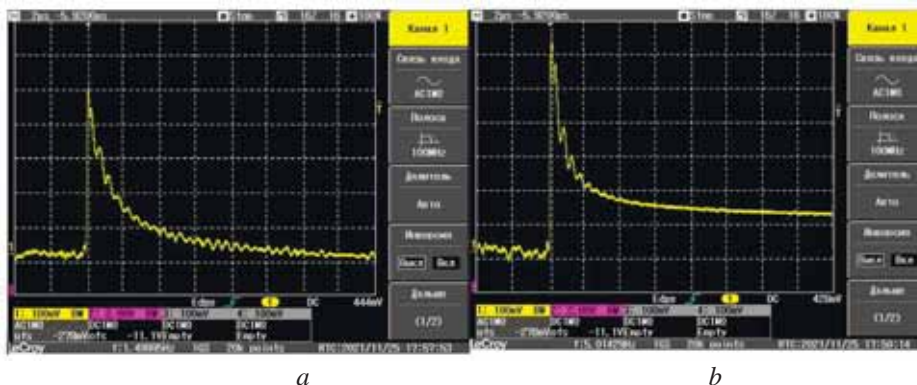


Рис.4. Кривые релаксации фототока в гетеропереходе p-GaSe/n-InSe, возбуждаемой 1-ой (кривая *a*) и 2-ой гармоникой (*b*) Nd:YAG-лазера.

4. Заключение

Методом дискретного испарения в вакууме кристаллов GaSe на подложку из InSe получена гетероструктура GaSe/InSe.

Методами однофотонного и двухфотонного возбуждения Nd:YAG-лазера, экспериментально исследованы спектры люминесценции гетероперехода p-GaSe/n-InSe и показано, что наблюдаемые линии излучения, при длине волны 606 нм и 1097 нм, обусловлены излучательной рекомбинацией свободных экситонов. Особенности, наблюдаемые в кривых релаксации фототока, могут быть объяснены наличием быстрого канала рекомбинации и энергетического барьера в запрещенной зоне полупроводника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г.Б., Мирзоев Б.Р., Рывкин С.М., Ярощцкий И.Д., Шаранов Ю.Л., Салманов В.М. Генерация в GaSe при двухфотонном оптическом возбуждении. ФТП, **4** (1970) 1395-1398.
2. Абдуллаев Г.Б., Кулевский Л.А., Прохоров А.Г., Савальев А.Д., Салаев Е.Ю., Смирнов В.В. GaSe- новой эффективной материал для нелинейной оптики. Письма в ЖЭТФ, **16**(3) (1972) 130-133.
3. Абдуллаев Г.Б., Агаева А.А., Ярощцкий И.Д., Салманов В.М. Генерация второй гармоники в соединения A^3B^6 . ФТП, **7** (1973) 1229-1234.
4. Дворников Д.П., Ярощцкий И.Д., Салманов В.М. Наблюдение резонансного излучения в области сплошного спектра полупроводников. Письма в ЖЭТФ, **20** (1974) 17-23.
5. Абдуллаев Г.Б., Аллахвердиев К.Р., Кулевский Л.А., Прохоров А.М., Салаев Э.Ю., Смирнов В.В. Параметрическое преобразование ИК-излучения в кристаллах GaSe. Квантовая электроника. **2** (1975) 1228 -1235.
6. Kyazym-zade A.H., Salmanov V.M., Karabulur M., Dincher A., Huseynov A.H., Dzhafarov M.A. Structure, optical and luminescent properties of GaSe and InSe

- nanoparticles International Journal of Current Research. USA, 7(7) (2015) 18321-18327.
7. Е.А.Боброва В.С.Вавилов, Г.Н.Галкии, М.С.Епифанов, Р.М.Мехтиев, В.П.Сафаров. Измерение двухфотонного поглощения в GaS_xSe_{1-x} . ФТП, **11**(1) (1975) 132-134.
 8. Кязым-заде А.Г., Салманов В.М., Гусейнов А.Г., Мамедов Р.М., Салманова А.А., Ахмедова Ф.Ш. Особенности оптического поглощения и фотопроводимости моноселенида индия при лазерном возбуждении. Известия ВУЗов, Томск, **60**(10) (2017) 30-33.
 9. V.Chikan and D.F. Kelley. Synthesis of Highly Luminescent GaSe Nanoparticles. Nano Letters, **2** (2002) 141 -147.
 10. V. Chikan and D.F. Kelley. Relaxation Dynamics in Photoexcited GaSe Nanoparticles. J. Chem. Phys., **117** (2002) 8944 -8951.
 11. V. Chikan and D.F. Kelley. Carrier Relaxation Dynamics in GaSe Nanoparticles. Nano Letters, **2** (2002) 10151021.
 12. D.F. Kelley. Nanoparticles of Layered Semiconductors in Molecular and Supramolecular Photochemistry, Vol. 10, Semiconductor Photochemistry and Photophysics, K. S. Schanze and V. Ramamurthy, eds., Marcel Dekker, New York. 2003, 173 pp.
 13. H. Tu, V. Chikan and D. F. Kelley. Electron and Hole Intraband Spectroscopy of GaSe Nanoparticles. J. Phys. Chem B, 2003, v. 107, p.10389 - 10396.
 14. H.Tu, S.Yang, V. Chikan and D. F. Kelley. Spectroscopy of GaSe Nanoparticle Aggregates. J. Phys Chem. B, 2004, v.108, p. 4701 -4708.
 15. Haohua Tu, Karoly Mogyorosi, and David F. Kelley, Intraband Spectroscopy and Photophysics in GaSe Nanoparticles. Phys. Rev. B, 2005, v.72, p. 205306 - 205312.
 16. H.Tu, K. Mogyorosi and D. F. Kelley. Exciton Dynamics in GaSe Nanoparticle Aggregates, J. Chem. Phys. 2005, v. 122, p.44709 - 44715.
 17. Shuming Yang and David F. Kelley. The Spectroscopy of InSe Nanoparticles. J. Phys, Chem. B, 2005, v.109, p. 12701 -12708.
 18. Xiang-Bai Chen and David F. Kelley, "Photophysics of GaSe/InSe Nanoparticle Heterojunctions. J. Phys. Chem. B, 2006, v. 110, p. 25259 -25267.
 19. Shuming Yang and David F.Kelley. Transient Absorption Spectra and Dynamics of InSe Nanoparticles. J. Phys, Chem. B, 2006, v. 110, p.13430 -13437.
 20. L.C.T. Shoute and David F. Kelley. Spatial Organization of GaSe Quantum Dots: Organic/Semiconductor Liquid Crystals. J. Phys. Chem. C, 2007, v.111, p. 10233-10238.
 21. J. Shao, H. Mirafzal, J. R. Petker, J. L. S. Cosio, D. F. Kelley and T. Ye, Nanoscale Organization of GaSe Quantum Dots on a Gold Surface. J. Phys. Chem. C, 2009, v.113, p. 19102 -19108.
 22. Казым-заде А.Г., Салманов В.М., Агаева А.А. Детекторы оптического излучения на основе слоистых кристаллов GaSe и InSe. Журн. технической физики. 2007. Т. 77. № 12. С. 152–159.
 23. Schluter M., Gamassell J., Kohn S., Voitchovsky J.P., Shen Y.R., Cohen M.L. Optical properties of GaSe and GaS_xSe_{1-x} mixed crystals. Phys. Rev.B, 1976, v. 13, p. 3534-3547.
 24. Nilanthy Balakrishnan, Zakhar R. Kudrynskiy, Emily F. Smith, Michael W. Fay, Oleg Makarovskiy, Zakhar D. Kovalyuk, Laurence Eaves, Peter H Beton and Amalia Patanè. IOP Publishing Ltd 2D Materials, 2017, v. 4, 2, 025043, p. 1-10.
 25. A.G. Kyazim-zade, V.M. Salmanov, A.G. Huseynov, R.M. Mamedov, A.A. Salmanova, F. Sh. Ahmedova. Nonlinear optical and quanta-dimensional effects in monoselenide of gallium and indium. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics октябрь, 2017, 8 (5), pp. 1-7.
 26. Denis A. Bandurin, Anastasia V. Tyurnina, Geliang L. Yu, Artem Mishchenko, Viktor

- Zólyomi, Sergey V. Morozov, Roshan Krishna Kumar, Roman V. Gorbachev, Zakhar R. Kudrynskiy, Sergio Pezzini, Zakhar D. Kovalyuk, Uli Zeitler, Konstantin S. Novoselov, Amalia Patané, Laurence Eaves, Irina V. Grigorieva, Vladimir I. Fal'ko, Andre K.Geim & Yang Cao. *Nature Nanotechnology*, (2016) doi: 10.1038/nnano.2016.242.
27. Mercier A., Mooser E., Voitchovsky J.P., Baldereschi A. Exciton-exciton and exciton-carrier scattering in GaSe. *J. Lumin.*, 1976, v.12, p. 285-291.
28. Akhundov G.A., Ermolovich J.B., Kaziev F.N., Sheinkman M.K. Photoluminescence ($\lambda_m = 1.1 \mu\text{m}$) in InSe single crystals and interrelation to photoconductivity. *Phys. Stat. Sol.* 1969, v. 35, p. 1065-1070.
29. Akhundov G.A., Gasanova N.A., Nazametdinova M.A. Optical absorption, reflection and dispersion of GaS and GaSe layer crystals. *Phys. Stat. Sol.*, 1966, v.15, p. k109- k102.
30. Besson J.M., Toullec R. Le., Piccioli N. Band-gap excitons in gallium selenide. *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v.39, p. 671-675.

LAZER HƏYƏCANI ZAMANI GaSe/InSe HETEROSTRUKTURLARINDA LÜMINESSENSİYA VƏ FOTOKEÇİRİCİLİK

R.M.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Eksperimental olaraq GaSe, InSe nazik təbəqələrini və GaSe/InSe heteroqəçidini 1064, 532 və 335 nm dalağa uzunluqlu şüalanma generasiya edən generatorla təhciz edilmiş Nd:YAG-lazerinin şüalanması ilə həyəcanlaşdırmaqla lüminessensiya və fotokeçiricilik xassələri tədqiq olunmuşdur. Göstərilmişdir ki, GaSe/InSe heteroqəçidinin lüminessensiya spektrində müşahidə olunan şüalanmalı rekombinasiya sərbəst eksitonlarla əlaqədardır. GaSe/InSe sistemində fotocərəyanın relaksasiya əyrilərinin tədqiqi onlarda sürətli rekombinasiya kanalının və lazer şüalanması ilə yaranan qeyri-tarazlıqlı yükdaşıyıcılar üçün enerji baryerinin mövcudluğunu göstərir.

Açar sözlər: GaSe/InSe heteroqəçid, lazer, lüminessensiya, fotokeçiricilik.

LUMINESCENCE AND PHOTOCONDUCTIVITY IN GaSe/InSe HETEROSTRUCTURES UPON LASER EXCITATION

R.M.MAMEDOV

SUMMARY

The luminescence and photoconductivity of GaSe and InSe thin films and a GaSe/InSe heterojunction are experimentally studied upon excitation by radiation from a pulsed Nd:YAG laser with built-in generators of the 2nd and 3rd harmonics, designed to generate radiation with a wavelength of 1064, 532, and 335 nm. It is shown that the recombination radiation observed in the luminescence spectra of the GaSe/InSe heterojunction is apparently associated with free excitons. Studies of photocurrent relaxation curves in the GaSe/InSe system show that they have a fast recombination channel and an energy barrier for nonequilibrium carriers generated by laser radiation.

Keywords: GaSe/InSe heterojunction, laser, luminescence, photoconductivity.

UOT 538.915

NANO ÖLÇÜLÜ Y_2O_3 KRİSTALLARININ ELEKTRİK XASSƏLƏRİNƏ NEYTRON ŞÜASININ TƏSİRİ

A.O.DAŞDƏMİROV, R.F.RZAYEV
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
arzu.dashdemirov@adpu.edu.az

Təqdim olunan işdə, yüksək təmizlik dərəcəsinə (99.99 %), nano ölçüdə kristalın sıxlığı 0.069 g/cm^3 , xüsusi səth sahəsi $100\text{-}150 \text{ m}^2/\text{g}$, kristalın orta ölçüsü $8\text{-}10 \text{ nm}$ intervalında dəyişən itrium oksidin $300\text{-}700 \text{ K}$ temperatur intervalında müxtəlif intensivlikli ($4.0 \times 10^{12} \text{ n/sm}^2$, $1.3 \times 10^{13} \text{ n/sm}^2$ və $4.0 \times 10^{14} \text{ n/sm}^2$) sürətli neytronlarla şüalanmadan sonra elektrik xassələri tədqiq olunmuşdur. Müəyyən olunmuşdur ki, geniş temperatur intervalında Y_2O_3 nano kristallarının elektrik xassələri müxtəlif intensivliklərdə şüalanmadan sonra elektrik keçiriciliyinin qiymətində xətti qanuna uyğunluqla artma müşahidə olunur. Sürətli neytron şüalanmanın intensivliklərindən asılı olaraq keçiriciliyin artması itrium vakansiyalarının keçiricilikdə dominantlıq təşkil etməsi ilə bağlıdır.

Açar sözlər: nano itrium-oksit kristalı, elektrik keçiriciliyi, sürətli neytronlar, aktivləşmə enerjisi.

1. Giriş

Nano materiallar və nano ölçülü kristallar üzərində son illər yerinə yetirilən eksperimental tədqiqatlar, həmçinin bu sinif materiallara məxsus olan Y_2O_3 nano kristalın müxtəlif şüalanma mənbələri ilə şüalandırıldıqdan sonra struktur xassələri geniş tədqiq olunmaqdadır [1, 2]. Y_2O_3 nano kristalının ZrO_2 , SiO_2 , TiC , ZrC kimi oksid və keramik materiallarla müxtəlif konsentrasiyalarda əmələ gətirdiyi kompozit birləşmələri analitik tədqiqat metodlarından istifadə edərək örtük materialları üçün tətbiqi araşdırılmaqdadır [3, 4]. Məlumdur ki, Y_2O_3 nano kristal nümunələri yüksək termik və elektrik keçiriciliyə, yüksək mexaniki xassələrə malikdir. Termofiziki xassələrin yüksək olması və geniş temperatur intervalında, oksidləşmə və struktur degradasiyasının olmaması termik nöqtəyi-nəzərdən daha çox tədqiq olunmaqdadır [5]. Lakin nəzəri hesablamalar ilə müəyyən olunmuşdur ki, Y_2O_3 quruluşlu nümunələrin elektrik keçiriciliyin qiymətinin öyrənilməsi olduqca vacibdir [6-8]. Otaq temperaturundan 1000 K -ə qədər Y_2O_3 nümu-

nəsinin termik keçiriciliyinin qiyməti azalan qanuna uyğunluqla dəyişir [9, 10]. Fərqli mühitlərdə Y_2O_3 elektron strukturu haqqında aparılan tədqiqatlarda O və Y atomlarının elektron konfigurasiyasının əsasları, elektron sıxlığının dəyişməsi, fərqli birləşmələrlə qarşılıqlı təsir zamanı elektron mübadilə haqqında tədqiqatlar yerinə yetirilməkdədir [11]. Məlumdur ki, sürətli neytron şüalanma zamanı struktur dəyişiklikləri nano kristalın mexaniki, elektrik və termik xassələrinə təsir göstərir [12].

Tədqiqat işində otaq temperaturunda 1 MeV enerjili sürətli neytronlarla şüalanmadan sonra elektrik xassələrin tədqiq olunmuş və prosesin aktivləşmə enerjisinin qiyməti təyin olunmuşdur.

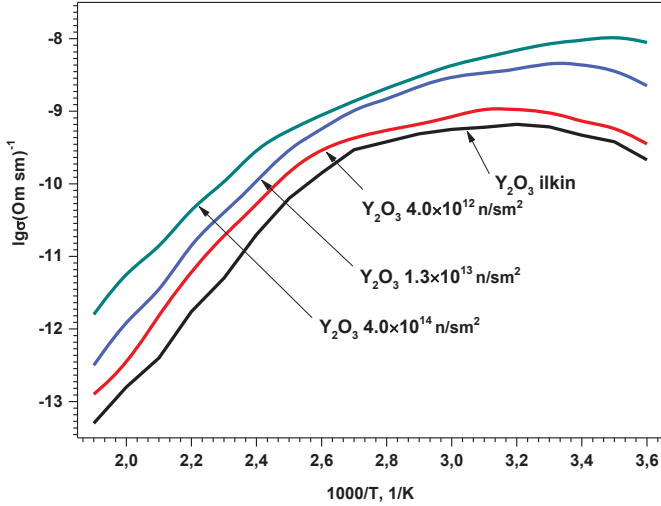
2. Eksperimental hissə

Tədqiqat üçün yüksək təmizlik dərəcəsinə (99.99 %), nano ölçüdə kristalın sıxlığı 0.069 g/cm^3 , xüsusi səth sahəsi $100\text{-}150 \text{ m}^2/\text{g}$, kristalın orta ölçüsü $8\text{-}10 \text{ nm}$ intervalında dəyişən itrium oksidin kristalları götürülmüşdür. Tədqiqat nümunələri Birləşmiş Nüvə Tədqiqatları İnstitutunun, Neytron Fizikası Laboratoriyasının İBR-2M impuls rejimində 1 MeV enerjili, sel sıxlığı $4.0 \times 10^{12} \text{ n/sm}^2$, $1.3 \times 10^{13} \text{ n/sm}^2$ və $4.0 \times 10^{14} \text{ n/cm}^2$ olan sürətli neytronlarla otaq temperaturundan şüalandırılmışdır. Nano kristalların elektrik xassələrinin tədqiqi zamanı nümunələr xüsusi dördbucaqlı formalarda hazırlanmış, anod və katod üzvlükləri cilalanmış və xüsusi müqavimətinin eksperimental ölçülməsi yerinə yetirilmişdir. Elektrik xassələrin ölçülməsi zamanı elektrodlardan, termocütlərdən, qızdırıcı sobadan, cərəyan mənbəyi və voltmetrdən istifadə olunmuşdur. Nano kristalları elektrodlar arasına yerləşdirdikdən sonra qızdırıcı vasitəsilə 2.5 K/dəq sürəti ilə xətti qızdırılması həyata keçirilmişdir. Nümunənin temperaturu termocüt, müqaviməti E6-13A teraometri vasitəsilə ölçülür. Elektrik keçiriciliyinin temperatur asılılığından alınmış eksperimental qiymətlərdən istifadə edərək aktivləşmə enerjisinin qiyməti hesablanmışdır. Aktivləşmə enerjisi Arenius koordinatlarından istifadə olunaraq təyin olunmuşdur.

3. Nəticələr və müzakirələr

Y_2O_3 nano kristal nümunələri presləmə üsulu ilə paralelopiped həndəsi forma şəklində hazırlanmış, $300\text{-}700 \text{ K}$ temperatur aralığında elektrik keçiriciliyinə sürətli neytron şüalanmanın təsiri tədqiq olunmuşdur. Şüalanmanın təsiri altında yaranan defektlərin elektrik sahəsinin təsiri altında dəyişməsi və strukturda yaranan vakansiyaların elektrik keçiriciliyinə təsiri öyrənilmişdir. Nano kristal nümunələr şüalanmadan əvvəl 1300 K temperaturda termik işlənmişdir. Termik işlənmə prosesindən sonra nümunələrin ilkin şüalanma qiymətləri ölçülmüşdür. Təcrübi ölçmələr elektrik sahəsinin sabit 12 V qiymətində yerinə yetirilmişdir. Nümunələrin müqavimətinin tempera-

turdan asılı olaraq tədqiq üçün E3-13A teraohmmetr cihazından istifadə olunmuşdur. Müqavimətə əsasən nano kristalların verilmiş sahələri, kontaktlar arası məsafənin qiyməti və təyin olunmuş xüsusi müqavimətdən həmin materialın elektrik keçiriciliyi təyin olunmuşdur. Şəkil 1-də Y_2O_3 nano kristalının 700 K temperatürə qədər müxtəlif intensivliklərdə sürətli neytronlarla şüalanmış elektrik keçiriciliyinin temperatur asılılığı göstərilmişdir. Müəyyən olunmuşdur ki, yüksək aktiv səthə malik kristallar 300-370 K temperatür intervalında səth tərəfindən zəif kimyəvi qarşılıqlı təsirdə olan su molekulları elektrik keçiriciliyinə təsir etmir. Y_2O_3 qadağan olunmuş zolağının eni 5.6 eV yarımkeçirici olmaqla geniş temperatür intervalında elektrik keçiriciliyini kiçik qiymətlərdə dəyişir.



Şəkil 1. Şüalanmamış və müxtəlif intensivliklərdə sürətli neytronlarla şüalandırılmış Y_2O_3 nano kristalının elektrik keçiriciliyinin temperatur asılılığı.

Şüalanmamış Y_2O_3 nano kristal nümunələrinin elektrik keçiriciliyi temperaturun 290-340 K intervalında xətti qanuna uyğunluqla dəyişir. Lakin sürətli neytron selinin intensivliyinin artması verilmiş temperatur intervalında elektrik keçiriciliyinin artmasına səbəb olur. Eksperimental təcrübələr mexanizminin müəyyən olunması üçün şüalanmamış Y_2O_3 nano kristal nümunələrin elektrik keçiriciliyinin təkrar ölçmə şərti yenidən yerinə yetirilmişdir. Məlum olduğu kimi təkrarlanan ölçmələrdə nümunələrin elektrik keçiriciliyinin qiymətində azalma müşahidə olunur və yüksək temperatürlərə doğru dəyişməklə təkrarlanan qiymətlərə bərabər olur. Həmçinin "Differential Scanning Calorimetry" metodu ilə aparılan tədqiqatlar göstərir ki, Y_2O_3 nano kristal nümunələrinin səthində 300-540 K temperatür intervalında zəif absorpsiya olunmuş su molekullarının dehidratasiyası kimi mürəkkəb proses baş verir. Mexanizm olaraq dehidratasiya prosesinin kinetikasi elektrik ke-

çiriciliyinin ədədi qiymətinin azalmasına, geniş temperatur intervalında qanunauyğunluqların müəyyən olunmasına və sürətli neytron selinin intensivliyindən asılı olaraq elektrik keçiriciliyinin ümumi dəyişməsi haqqında mülahizə söyləmək imkanı yaradır. Nano strukturlu birləşmələrin aktiv səthində absorbsiya olunmuş su molekullarının həcmdəki kationlarla ion-dipol qarşılıqlı təsir formalaşdırır və bu qarşılıqlı təsirin ümumi nəticəsi yeni hidrroksil funksional qrupların yaranmasına səbəb olur. Kristalın səthində su molekullarının desorbsiya mexanizmi nümunənin elektrik keçiriciliyində əsasən Y və O anion və kation xarakterikli qiymətlərə malik olur. Sürətli neytron selinin intensivliyinin artması ilə elektrofiziki xassəsində müşahidə olunmuş dəyişiklikləri formalaşan vakansiya, nöqtəvi defekt və həyəcanlanmış halların aktivləşməsi ilə izah etmək olar. Neytron şüaların nano kristallar təsiri zamanı yüklü və struktur defektləri formalaşır.



harada ki, e^+ , e^- deşik və elektron qeyri-tarazlı yük daşıyıcıları, S^* - adsorbsiya üzrə aktiv mərkəz, $\equiv YO$ və $\equiv Y$ radikal hallarda formalaşmışdır. Yaranan qeyri-tarazlı yükdaşıyıcıların strukturda vəziyyəti elektronodonor və elektronokseptor vakansiyalarda mövqə tuturlar. Elektronodonor və akseptor vəziyyətində lokallaşmış mərkəzlərin və qeyri-tarazlı yükdaşıyıcılarının lokallaşmış halları şəklindədir. Elektrik yükdaşıyıcıların elektrik keçiriciliyi prosesində iştirakı üçün lokallaşma mərkəzlərinin vakant yerini tutmaq üçün xarici enerji keçidi tələb olunur. Məhz bu aspektdən elektrik keçiriciliyinin qiymətində xətti artma halı 460K sonra yaranmaqdadır. Neytronlarla şüalanmış Y_2O_3 nano kristal nümunələrdə temperaturdan asılı olaraq dəyişmə verilmiş oblastda eyni xarakterli defektlər kaskadının yaranmasını göstərir.

Y_2O_3 nano kristal nümunələrinin elektrik keçiriciliyinin 300-600 K temperatur intervalında prosesin aktivləşmə enerjisinin hissələrə ayrılması müşahidə olunmuşdur. Şüalanmanın geniş temperatur intervalında elektrik keçiriciliyinin aktivləşmə enerjisinə təsiri cədvəl 1-də verilmişdir. Aktivləşmə enerjiləri temperaturun artması ilə energetik baryerli mərkəzlərin aktivləşməsi formalaşır. Sürətli neytron selinin şüalanma intensivliyinin artması aktivləşmə enerjisinin kiçilməsinə səbəb olur. Şüalanmamış nümunələrdə aktivləşmə enerjisinin qiyməti 1.04, 2.23 və 4.32 eV olduğu müəyyən olunmuşdur, vakansiya və nöqtəvi defektlərin aktivləşmə enerjiləri ilə uyğunluq təşkil edir.

Neytronla şüalandırılmış Y_2O_3 nanohissəciklərinin elektrik keçiriciliyində aktivləşmə enerjisi

İntensivlik	Aktivləşmə enerjisi, eV		
	270-330 K	330-420 K	420-700 K
Şüalanmamış	1.04	2.23	4.32
4.0×10^{12} n/sm ²	1.02	2.20	4.30
1.3×10^{13} n/sm ²	1.00	2.15	4.28
4.0×10^{14} n/sm ²	0.8	2.09	4.16

Aktivləşmə enerjisi əsasında lokallaşma mərkəzlərinin energetik səviyyələri haqqında məlumat verir. Şüalanma intensivliyinin artması ilə aktivləşmə enerjisi kiçilir, şüalanma təsiri ilə yaranan yükdaşıyıcılar yüksək enerjiyə malik olmuşdur.

Nəticə

Müxtəlif intensivlikli 4.0×10^{12} n/sm², 1.3×10^{13} n/sm² və 4.0×10^{14} n/sm² sürətli neytronlarla şüalanmış Y_2O_3 nano kristal nümunələrinin (təmizlik dərəcəsi 99.99%, toz halında sıxlığı 0.069 q/sm³, xüsusi səth sahəsi 100-150 m²/q, hissəcik ölçüsü 8-10 nm) $300 \leq T \leq 750$ K temperatur intervalında elektrik keçiriciliyinin qiyməti təyin olunmuşdur. Müəyyən olunmuşdur ki, verilmiş temperatur intervalında elektrik keçiriciliyin qiyməti müxtəlif hissələrə ayrılmaqla log(-13) dən log(-8) intervalında dəyişir. 4.0×10^{12} n/sm², 1.3×10^{13} n/sm² və 4.0×10^{14} n/sm² intensivliklərdə aktivləşmə enerjisinin qiyməti 1.04, 2.23 və 4.32 eV olduğu müəyyən olunmuşdur.

ƏDƏBİYYAT

1. F.Heshmatpour, R.Babadi-Aghakhanpour, Synthesis and characterization of superfine pure tetragonal nanocrystalline sulfated zirconia powder by a non-alkoxide sol-gel route, *Advanced Powder Technology*, 23 (2012), pp. 80-8
2. S.Wang, F.Zhao, L.Zhang, F.Chen. Synthesis of BaCe_{0.7}Zr_{0.1}Y_{0.1}O_{3-δ} proton-conducting ceramic by a modified Pechini method, *Solid State Ionics*, 213 (2012), pp. 29-35.
3. M. Dapiaggi, F. Magli, Il. Tredici, B. Maroni, G. Borghini, Umberto A. Tamburini Complex thermal evolution of size-stabilized tetragonal zirconia, *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 71 (2010), pp. 1038-1041.
4. Y. Repelin, C. Proust, E. Husson, J.M. Beny, Vibrational spectroscopy of the C-form of yttrium sesquioxide, *J. Solid State Chem.*, 118 (1995), p. 163
5. E. Husson, C. Proust, P. Gillet, J.P. Itié, Phase transitions in yttrium oxide at high pressure studied by Raman spectroscopy, *Materials Research Bulletin*, 34, (12-13), 1999, p.2085-2092.
6. A. K. Yadav and P. Singh, A Review of Structure of Oxide Glasses by Raman Spectroscopy, *RSC Adv.*, 2015, DOI: 10.1039/C5RA13043C.
7. A. O. Dashdemirov, J. I. Huseynov, R. F. Rzayev and Y. I. Aliyev. Thermophysical behavior in Y_2O_3 under high intensity fast neutron irradiation. *Modern Physics Letters B*, p. 2250092, 2022. <https://doi.org/10.1142/S0217984922500920>
8. M.N. Mirzayev, S.H. Jabarov, E.B. Asgerov, R.N. Mehdiyeva, T.T. Thabethe, S. Biira,

- N.V. Тиеп, Crystal structure changes and weight kinetics of silicon-hexaboride under gamma irradiation dose, Results in Physics, 10 (2018) 541-545.
9. M.N. Mirzayev, Kh.F. Mammadov, R.G. Garibov, E.B. Askerov, Thermophysical properties of boron carbide irradiated by ionizing radiation, High Temperature, 56(3) (2018) 374–377.
 10. S.R. Azimova, N.M. Abdullayev, Y.I. Aliyev, M.N. Mirzayev, Effect of the Se→Te substitutions on thermal properties of binary Bi 2 Se 3 semiconductor, Modern Physics Letters B, 34 (15), (2020) 2050156.
 11. M.N. Mirzayev, R.N. Mehdiyeva, R.G. Garibov, N.A. Ismayilova, S.H. Jabarov, Influence of gamma irradiation on the surface morphology, XRD and thermophysical properties of silicide hexaboride, Modern Physics Letters B, Vol. 32, No. 14, 1850151, 2018.

ВЛИЯНИЕ ПУЧКА НЕЙТРОНОВ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОРАЗМЕРНЫХ КРИСТАЛЛОВ Y_2O_3

А.О.ДАШДЕМИРОВ, Р.Ф.РЗАЕВ

РЕЗЮМЕ

В представленной работе использован оксид иттрия высокой степени чистоты (99,99%), плотность наноразмерного кристалла 0,069 г/см³, удельная поверхность 100-150 м²/г, средний размер кристалла варьируется в диапазоне 8-10 нм, изучена электрические свойства после облучения быстрыми нейтронами разной интенсивности (4,0×10¹² н/см², 1,3×10¹³ н/см² и 4,0×10¹⁴ н/см²). /см²). в интервале температур 300-700 К. Установлено, что электрические свойства нанокристаллов Y_2O_3 после облучения различной интенсивности, в широком диапазоне температур показывают увеличение значения электропроводности по линейному закону. Увеличение проводимости в зависимости от интенсивности излучения быстрых нейтронов связано с преобладанием в проводимости вакансий иттрия.

Ключевые слова: нанокристаллы оксида иттрия, электропроводность, быстрые нейтроны, энергия активации.

EFFECT OF NEUTRON BEAM ON ELECTRICAL PROPERTIES OF NANOSIZED Y_2O_3 CRYSTALS

A.O.DASHDEMIROV, R.F.RZAYEV

SUMMARY

In this work, we used high-purity yttrium oxide (99.99%), nanosized crystal density 0.069 g/cm³, specific surface area 100–150 m neutrons of different intensity (4.0×10¹² n/cm², 1.3×10¹³ n/cm² and 4.0×10¹⁴ n/cm²). /cm²). in the temperature range of 300-700 K. It has been established that the electrical properties of Y_2O_3 nanocrystals after irradiation of various intensities, in a wide temperature range, show an increase in the electrical conductivity according to a linear law. An increase in conductivity depending on the intensity of fast neutron radiation is associated with the predominance of yttrium vacancies in the conductivity.

Keywords: yttrium oxide nanocrystal, electrical conductivity, fast neutrons, activation energy.

UOT 539.1

HƏQİQİ İDENTİFİKASİYASI OLMAYAN LEPTON FONUNUN MATRIX METODU İLƏ QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

N.Ə.HÜSEYNOV

Fizika İnstitutu, Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası
nguseynov@jinr.ru

Təqdim olunan işdə tHq(bb) kanalında həqiqi olmayan leptonlar fonunu qiymətləndirmək üçün istifadə olunan məlumatlar əsasında Matris Metodu (MM) yaxınlaşması əsas ideya kimi təsvir edilmişdir. Matris Metodu tez və həqiqi olmayan elektronların/müonların identifikasiyasının, izolyasiya və təsir parametrlərinin tələblərinin fərqli reaksiyasına əsaslanır. Metod lepton seçimlərindən istifadə etməklə ilkin seçim bölgəsində olduğu kimi eyni meyarlarla seçilmiş məlumat hadisələrindən istifadə edir. Nominal seçim kəsiklərində aşağıdan keçən leptonlar sıx leptonlar, daha boş meyarlardan keçən leptonlar isə boş leptonlar kimi qeyd olunur. Elektronlar və müonlar üçün operativ effektivlik həqiqi olan və olmayan elektron və müonların nominal elektron/müon tələblərini keçmə ehtimalı kimi müəyyən edilir və həqiqi olan və olmayan leptonlarla zənginləşdirilmiş xüsusi nəzarət bölgələrində ölçülür. Müvafiq elektron və ya müonların həqiqi olmayan və real effektivlikləri pT və $|\eta|$ -da parametrləşdirilmişdir.

Açar sözlər: Hiqq bozonun yaranması, fake lepton estimation, Matrix metod

Giriş. Matrix Metodu [1] ümumi analiz kontekstində həqiqi olmayan fiziki obyektləri, elektron və müon sayının qiymətləndirilməsi üçün verilənlərə əsaslanan texniki yaxınlaşmadır [2]. Seçim kimi istinad edilən signal bölgəsinə uyğun gələn müəyyən təsnifatlardan istifadə olunur. Lepton seçiminin ətraflı təsviri cədvəl 1-də göstərilmişdir.

Matris metodunun əsas ideyası birinci mərhələdə yalnız bir leptonun nəzərə alındığı və sadələşdirilmiş prosesi effektiv şəkildə təsvir etməkdən ibarətdir [3]. Sıx leptonlarla hadisələrin sayı (T ilə işarələnir) və seçimdə zəif leptonu olan hadisələrin sayı (T' anti-sıx kimi qeyd olunur) əsas boşluq üçün effektivliyini qeyd etmək mümkündür. İki tənliklər sistemi vasitəsilə sıx seçiminə keçmək üçün əsas boşluq (burada "sərbəst" "anti-sıx" və "sıx" alt çoxluqların birləşməsinə uyğundur) real (cəld) və ya həqiqi olmayan leptonlar üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Əsas sərbəst və sıx leptonların təyini

Electrons		
	<i>Loose</i>	<i>Tight</i>
$ d_0^{sig} $	5	5
$ z_0 \sin \theta $	0.5 mm	0.5 mm
Electron ID	Loose LH	Tight LH
Isolation	—	FixedCutLoose WP
Non-prompt rejection	—	PromptLeptonVeto < -0.7
Charge flip rejection	—	QMisIDKiller > 0.7

Muons		
	<i>Loose</i>	<i>Tight</i>
Quality	Loose	Loose
$ d_0^{sig} $	3	3
$ z_0 \sin \theta $	0.5 mm	0.5 mm
Isolation	—	FixedCutLoose WP
Non-prompt rejection	—	PromptLeptonVeto < -0.5

$$N^T = \varepsilon_r N^r + \varepsilon_f N^f$$

$$N^{\bar{T}} = \not{\varepsilon}_r N^r + \not{\varepsilon}_f N^f$$

və yaxud matris şəklində aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar.

$$\begin{pmatrix} N^T \\ N^{\bar{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_f \\ \not{\varepsilon}_r & \not{\varepsilon}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^r \\ N^f \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_r(\varepsilon_f)$ real (həqiqi olmayan) leptonun sıx seçimdən keçməsi üçün effektivliyi, $\varepsilon_r \equiv (1 - \varepsilon_r)$ ($\varepsilon_f \equiv 1 - \varepsilon_f$) real (həqiqi olmayan) leptonun sıx zəif, lakin hələ də əsas seçimdən keçmə ehtimalını xarakterizə edir. Verilmiş tənzimləmələri əks istiqamətdə çevirməklə real və həqiqi olmayan leptonların qeyri-müəyyən sayını müşahidə edən kəmiyyətlər dəstinə, yəni sıx və sıx olmayan leptonların sayına və sıx seçimdən keçmək üçün effektivliyə aid etmək mümkündür. Həm real, həm də həqiqi olmayan lepton effektivliyi daha sonra ətraflı təsvir olunduğu kimi, məlumatlardan istifadə edərək, xüsusi qeyd olunmuş hissələrdə birbaşa ölçmək mümkündür. Analiz müddətində tHq(bb-) kanalında həqiqi olmaya bilən əsas seçimi təmin edən bir lepton namizədi mövcuddur. Bu fərziyyəyə görə istifadə olunan Matrix Metodu formalizmi dilepton hallarından biridir [4].

Hər bir leptonun sıx seçimdən keçib-keçməməsindən asılı olaraq,

verilmiş i -ci hadisə iki ortoqonal (yan zolaqlar üzrə) bölgədən hər hansı birinə təsnif oluna bilər.

T_i -sıx seçimdən keçən aparıcı lepton ilə baş verən hadisə (cəm hadisələr N^T)

T_i - aparıcı leptonun sıx seçimi ilə nəticələnən hadisə (cəm hadisələr N^T)

Bu cür hadisələrin ümumi sayını fərqli real və həqiqi olmayan lepton tərkibi ilə xarakterizə olunan iki dileptonik bölgədəki hadisələrin ümumi sayına uyğunlaşdırmaq üçün $A_{2 \times 2}$ effektivlik matrisi müəyyən oluna bilər, yəni:

r_i aparıcı leptonun real olması ilə baş verən hadisə (cəm hadisələr N^r)

f_i aparıcı leptonun həqiqi olmaması ilə baş verən hadisə (cəm hadisələr N^f)

Müşahidə oluna bilən funksiya kimi siqnal bölgəsində həqiqi olmayan sayını əldə etmək üçün 2×2 matrisini tərsinə çevirmək olar.

$$\begin{pmatrix} N^r \\ N^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_f \\ \phi_r & \phi_f \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N^T \\ N^{\bar{T}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_r \phi_f - \varepsilon_f \phi_r} \begin{pmatrix} \phi_f & -\varepsilon_f \\ \phi_r & \varepsilon_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^T \\ N^{\bar{T}} \end{pmatrix}$$

$N(r,T)$ siqnal bölgəsindəki real leptonların son sayı, yəni ən azı bir real leptonu olan T hadisələrinin ümumi sayı tərifdən tapıla bilər.

$$N^r = \frac{\phi_f N^T - \varepsilon_f N^{\bar{T}}}{\varepsilon_r \phi_f - \varepsilon_f \phi_r} =$$

$N(f,T)$ siqnal bölgəsindəki həqiqi olmayan leptonların son sayı, yəni ən azı bir həqiqi olmayan leptonu olan T hadisələrinin ümumi sayı tərifdən tapılır.

$$N^f = \frac{\phi_r N^T - \varepsilon_r N^{\bar{T}}}{\varepsilon_r \phi_f - \varepsilon_f \phi_r}$$

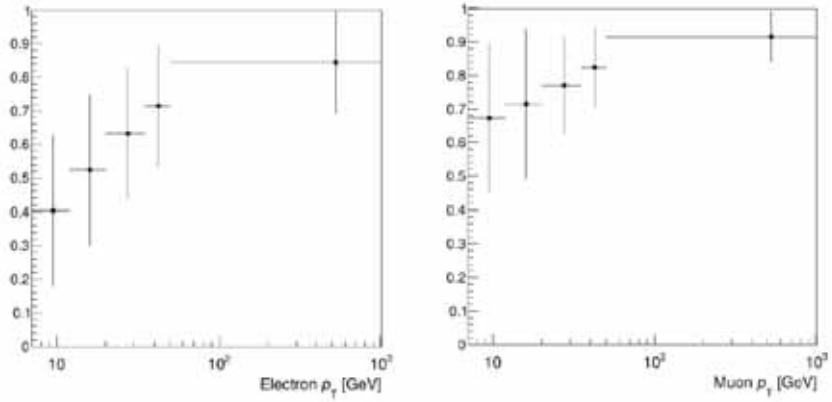
Matris tənliliyini sonrakı tənlilərə əlavə etməklə alınmış cəmi aşağıdakı kimi qeyd etmək olar.

$$\begin{aligned}
N_T^f &= \varepsilon_f N^f = \varepsilon_f \frac{\phi_r N^T - \varepsilon_r N^T}{\varepsilon_r \phi_f - \varepsilon_f \phi_r} = \\
&= \sum_i^T \varepsilon_{fi} \phi_{ri} w_i - \sum_i^T \varepsilon_{fi} \varepsilon_{ri} w_i \\
w_i &= \frac{1}{\varepsilon_{ri} \phi_{fi} - \varepsilon_{fi} \phi_{ri}}
\end{aligned}$$

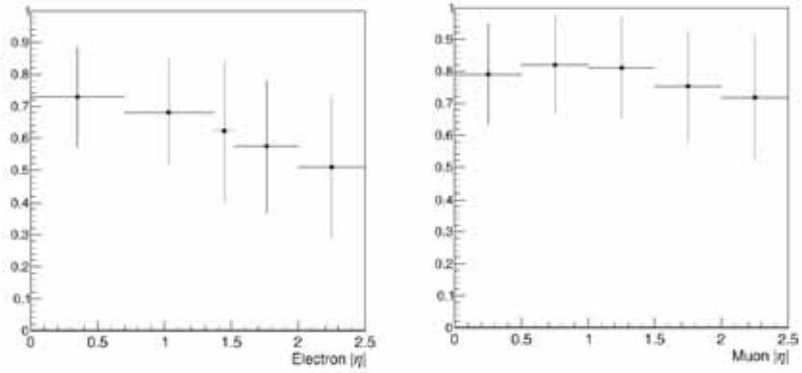
Aydındır ki, hər i -ci hadisə tənliyinin sağ tərəfindəki iki cəmdən yalnız birinə töhfə verəcəkdir. Bu analizdə tH-ML analizindən real və həqiqi olmayan effektivlikdən istifadə olunmuşdur. Alınmış nəticələrin ətraflı təsviri ATLAS-ın daxili qeydində verilmişdir [1].

Nəticə və müzakirələr

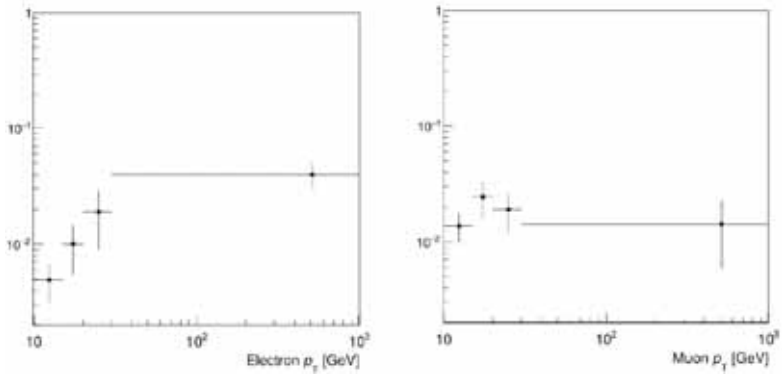
Həqiqi və həqiqi olmayan, (CR) kimi istinad edilən iki nəzarət bölgəsi həqiqi və həqiqi olmayan leptonların sıx seçim tələblərini keçməsi üçün effektiv ölçmək üçün müəyyən edilmişdir. Aşağıdakı verilənlərlə geniş şəkildə göstərilmiş bu növ hissələrin kinematika və fon tərkibi baxımından 2SS0g və 30g siqnal hissəsini təmsil etmək üçün nəzərdə tutulmuşdur və eyni zamanda kifayət qədər böyük statistikanı saxlamaqdadır. 2SS0g SR-yə ortoqonallıq yalnız bu halda 2 və ya 3 şırnaq vasitəsilə həyata keçirilir və dilepton tələbi 30g SR-yə ortoqonallığı təmin edir. Həqiqi olmayan formalaşmada potensial böyük dəyişikliklərin qarşısını almaq üçün ən azı bir b etiketli şırnaq tələbi saxlanılır. Lepton kinematikasından asılı olaraq həqiqi olmayan proqnozlar əldə etmək üçün effektivliklər P_T ilə hesablanmışdır. Elektronun həqiqi olmayan sürəti üçün faktiki olaraq (*Nb-tags*) ikiölçülü parametrləşdirmə istifadə olunur. Bu halda böyük b -şırnaq çoxluğu olan hadisələrdə həqiqi olmayan modelləşdirmə təkmilləşdirilir. Müonların həqiqi olmayan dərəcəsi üçün ən yaxşı modelləşdirmə məsafə haqqında məlumatları müon və onun ən yaxın reaktivi P ilə yanaşı ehtiva edən parametrləşdirmə vasitəsilə əldə edilir. Həqiqi və həqiqi olmayan elektronlar və müonlar üçün effektivlik paylamaları müvafiq olaraq şəkil 1-3 verilmişdir.



Şək. 1. Verilmiş məlumatlardan ölçülən elektron (solda) və müonun (sağda) real effektivlikləri.

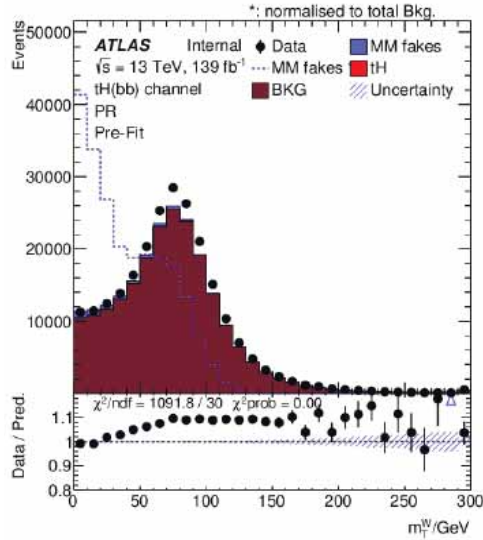


Şək. 2. Verilmiş məlumatlardan ölçülən elektron (solda) və müonun (sağda) real effektivlikləri.



Şək. 3. Verilmiş məlumatlardan ölçülən elektron (solda) və müonun (sağda) real effektivlikləri.

Şablon metodundan istifadə edərək Matris Metodunun nəticələrini çarpaz yoxlanılmışdır. Verilmiş metod yalnız həqiqi olmayan genişləndirilmiş nümunə ilə azı 50 % həqiqi olmayan leptonların bir hissəsindən istifadə olunur. Məlumdur ki, 1L kanalda belə bir nümunə seçmək mümkün deyil. Həqiqi olmayan lepton fraksiyasını genişləndirmək üçün optimal dəyişən kimi eninə kütlə götürülür. Şəkil 4-dən görüldüyü kimi, həqiqi olmayan fraksiya, hətta kiçik $< m(T)$ dəyərlərində də çox aşağıdır. 30 GeV və 60 GeV-dən kiçik kəsəmləri ilə iki həqiqi olmayan genişləndirilmiş hissəsi seçilmişdir.



Şəkil 4. $< m(T)$ paylanmasında həqiqi olmayan CR axtarılması.

Beləliklə, bütün nəticələr cədvəl 2-də ümumiləşdirilmişdir. Həqiqi olmayan leptonların fraksiyaları müvafiq olaraq 6.6 % və 4.4% təşkil edir. Beləliklə, 1L kanalı üçün şablon metodunu tətbiq etmək mümkün olmadığı nəticəsinə gəlirik.

Cədvəl 2

Həqiqi olmayan leptonların paylanmasının

	SR	CR(m(W/T)) 30 GeV	CR(m(W/T)) 60 GeV
tH	48.5±1.1	10.1±0.5	25.8±0.8
BKG	44900±80	32810±70	79680±100
MM həqiqi olmayanlar	1291±30	2336±35	3670±50
Cəm	46240±80	35160±80	83380±80
Məlumat	49137	35188	85770

ӘДӘБИҲАТ

1. ATLAS Collab., Phys. Lett. B 716, 1 (2012).
2. G. Aad *et al.* (ATLAS Collab.), ATL-COM-PHYS-2022-645, 2022.
3. M. Aaboud, O. Abidinov, and et. al., Electron reconstruction and identification in the ATLAS experiment using the 2015 and 2016 LHC proton–proton collision data at $\sqrt{s}=13$ TeV, *The European Physical Journal C* vol. 79, Article number: 639 (2019) <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1356695/FULLTEXT01.pdf>
4. Erich W. Varnes, A Poisson likelihood approach to fake lepton estimation with the matrix method, arXiv:1606.06817 [hep-ex] <https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.06817>
5. Thomas P.S. Gillam and Christopher G., Lester Improving estimates of the number of ‘fake’ leptons and other mis-reconstructed objects in hadron collider event JHEP11(2014)031 /home/nguseynov/Downloads/JHEP11(2014)031_a.pdf
6. ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2014-058, September 30, 2014, Estimation of non-prompt and fake lepton backgrounds in final states with top quarks produced in proton-proton collisions at $\sqrt{s}=8$ TeV with the ATLAS detector <https://cds.cern.ch/record/1951336/files/ATLAS-CONF-2014-058.pdf>

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОШИБОЧНО ИДЕНТИФИЦИРОВАННЫХ ЛЕГКИХ ЛЕПТОНОВ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ

Н.А.ГУСЕЙНОВ

РЕЗЮМЕ

В этой статье описывается основная идея матричного метода (ММ), основанного на данных подходе, используемого для оценки фальшивого лептонного фона в канале $t\bar{H}q(bb)$. Метод основан на различном отклике мгновенных и ложных электронов/мюонов на требования к идентификации, изоляции и прицельным параметрам. Метод использует события данных, выбранные с теми же критериями, что и в области предварительного выбора, но с более слабым выбором легких лептонов. Лептоны, прошедшие номинальные разрезы отбора, в дальнейшем называются плотными лептонами, а лептоны, прошедшие более слабые критерии, обозначаются как свободные лептоны. Фальшивая и мгновенная эффективность для электронов и мюонов определяется как вероятность того, что ложный или настоящий электрон или мюон пройдет номинальные требования к электронам/мюонам, и измеряется в специальных контрольных областях, обогащенных реальными и ложными лептонами. И фиктивная, и реальная эффективность параметризуются в p_T и $|\eta|$ соответствующего электрона или мюона.

Ключевые слова: Рождение бозона Хиггса, Оценка фальшивых лептонов, Матричный метод

ESTIMATION OF MISIDENTIFIED OF LIGHT LEPTONS USING MATRIX METHOD

N.A.HUSEYNOV

SUMMARY

This article describes the basic idea behind the Matrix Method (MM), the data-driven approach used to estimate the fake lepton background in the $tHq(bb)$ channel. The method relies on a different response of the prompt and fake electrons/muons to identification, isolation and impact parameter requirements. The method uses data events selected with the same criteria as in the pre-selection region, but with looser light-lepton selections. The leptons passing the nominal selection cuts are referred to as tight leptons in the following, while leptons passing the looser criteria are denoted as loose leptons. The fake and prompt efficiencies for electrons and muons are defined as the probabilities of a fake or real electron or muon to pass the nominal electron/muon requirements and are measured in dedicated control regions enriched in real and fake leptons. Both fake and real efficiencies are parametrised in p_T and $|\eta|$ of the respective electron or muon.

Keywords: Creation of Higgs boson, fake lepton estimation, Matrix method

УДК 621.38

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ И ФОТОПРОВОДИМОСТЬ В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ GaS/GaSe ПРИ ЛАЗЕРНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Р.М.МАМЕДОВ

Бакинский государственный университет
rovshan63@rambler.ru

Экспериментально исследованы спектры и люкс-амперные характеристики люминесценции и кривые релаксации фототока гетеропереходов GaS/GaSe при двухфотонном возбуждении импульсного Nd:YAG-лазера. Показано, что рекомбинационное излучение наблюдаемое в спектрах люминесценции гетероперехода GaS/GaSe связано зона-зонными и примесными переходами. Оценена концентрация неравновесных носителей, генерированных лазерным светом.

Ключевые слова: гетеропереход GaS/GaSe, лазер, люминесценция, фотопроводимость.

Введение

Сейчас очень трудно представить современную физику твердого тела без полупроводниковых гетероструктур. Полупроводниковые гетероструктуры и, особенно, двойные гетероструктуры, включая квантовые ямы, нити и точки, являются сегодня предметом исследований 2/3 исследовательских групп в области физики полупроводников. Если возможность управления типом проводимости полупроводника с помощью легирования различными примесями и идея инъекции неравновесных носителей заряда были теми семенами, из которых выросла полупроводниковая электроника, то, гетероструктуры дают возможность решить значительно более общую проблему управления фундаментальными параметрами в полупроводниковых кристаллах и приборах: шириной запрещенной зоны, эффективными массами носителей и их подвижностями, показателем преломления, электронным энергетическим спектром и т.д. Существует много методов для изготовления гетеропереходов. В большинстве случаев гетеропереходы изготавливаются эпитаксиальным наращиванием одного полупроводни-

кового материала на другой: испарение, сплавление и выращивания из раствора, молекулярно – пучковая эпитаксии, газофазная эпитаксия из паров металлоорганических соединений, лазерная абляция и т. д. [1, 2].

Наряду с вышеуказанными методами существует еще один метод изготовления полупроводниковых гетероструктур. Этот метод был развит в 1930 году А.Ф. Иоффе, но из-за технической причины не был реализован. Этот метод называется методом посадки на оптический контакт. Сущность метода посадки на оптический контакт заключается в том, что два контактирующих полупроводниковых материала должны иметь почти «идеальную» поверхность. Иными словами для оптического контакта шероховатости поверхностей контактирующих материалов не должны превышать четверти длины света. Разумеется, не все полупроводники отвечают этим требованиям. Для этого необходимо, чтобы гетеропереходы, изготовленные методом посадки на оптический контакт (ПОК), характеризовались отсутствием или малой концентрацией состояний на границе раздела контактирующих фаз [3-7].

Слоистые кристаллы GaSe, GaS, InSe и другие кристаллы из соединений A^3B^6 идеально подходят для этой цели. Поскольку эти кристаллы обладают слоистой структурой, то эта особенность позволяет изготовить на их основе образцы с зеркальной поверхностью и обуславливает химическую, а также адсорбционную инертность поверхностей естественных сколов. При этом образцы химической обработке не подвергались. Как показывают исследования, монокристаллы полупроводниковых соединений типа A^3B^6 со слоистой структурой характеризуются малой концентрацией разнообразных поверхностных состояний, и граница раздела диодных структур на их основе является более совершенной.

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию спектров люминесценции и фотопроводимости гетеропереходов GaS/GaSe, изготовленных методом посадки на оптический контакт под действием лазерного излучения.

Экспериментальный метод

Для изготовления гетеропереходов были использованы монокристаллы GaS и GaSe, полученные методом Бриджмена. Простым расщеплением массивных образцов были изготовлены плоско-параллельные пластинки с толщинами $50 \div 100$ мкм. Затем свежесколотые поверхности были прижаты друг к другу, и они держались вместе несколько часов под небольшим давлением ~ 10 кг/см². При этом образцы были предварительно снабжены омическими контактами из In. По-

верхности контактирующих образцов сцеплялись из-за внутримолекулярных сил, возникающих между ними. Омичность контактов предварительно проверялась при помощи вольт-амперных характеристик симметричных структур In-GaS-In и In-GaSe-In. Площади исследованных гетеропереходов составляли порядка нескольких квадратных миллиметров ($3 \times 3 \text{ мм}^2$). Поверхности контактирующих материалов не подвергались никакой химической обработке.

В качестве источника излучения использовался импульсный Nd:YAG-лазер со встроенными генераторами 2-й и 3-й гармоник, предназначенный для генерации излучения с длиной волны 1064, 532 и 335 нм. Длительность лазерного импульса составляла 10 нс с максимальной мощностью $\sim 12 \text{ МВт/см}^2$. Интенсивность излучения изменялась при помощи калиброванных нейтральных световых фильтров. С помощью линзы падающий лазерный луч фокусировался на поверхность образца с диаметром пятна $\sim 2.0 \text{ мм}$. Спектры люминесценции тонких пленок GaSe, GaS и гетероструктур GaSe/GaS исследовались с использованием автоматического монохроматора M833 с двойной дисперсией (спектральное разрешение $\sim 0,024 \text{ нм}$ на длине волны 600 нм), с компьютерным управлением и детектором, регистрирующим излучение в диапазоне длин волн 350-2000 нм. Регистрация импульсов фотопроводимости производилась по методике позволяющей записывать на экране запоминающего осциллографа (Le Croy 9400) одиночные наносекундные импульсы [8].

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Основные физические свойства гетероструктур GaS/GaSe зависят не только от электрических параметров контактирующих полупроводников, а также от конструктивных особенностей структур. На самом деле гетерокontakt GaS-GaSe является структурой полупроводник-диэлектрик-полупроводник, в которой роль диэлектрика, несмотря на сложившееся мнение об инертности поверхностей слоистых полупроводников к абсорбции сторонних атомов из атмосферы, играет именно слой кислорода, который представляет собой неравновесное состояние системы с долгим временем релаксации. Вследствие диффузионного расплывания кислорода, полупроводниковые пластины GaS и GaSe приходят в реальный тесный контакт, площадь которого составляет всего $\sim 10 \%$ от геометрической площади гетероперехода. Если производить расчет к.п.д. фотопреобразования таких структур с учетом реальной площади (т.е. площади, которая пришла в тесный контакт), то его величина для гетероперехода, при изготовлении которых использовались моноселениды сульфида и галлия с оптимальными электриче-

скими параметрами, возрастает с 3,2 до 11-12 %. В том случае, если реализация участков тесного контакта GaS/GaSe является следствием частичного вытеснения воздушной прослойки или же «обволакивания» скоплений адсорбированных атомов под действием веса контактирующих полупроводников, целесообразным представляется проведение исследования влияния давления на параметры фотопреобразования оптического контакта GaS/GaSe.

На рисунке 1 представлены вольт-амперные характеристики гетероперехода GaS/GaSe при различных приложенных внешних давлениях. Гетеропереходы подвергались механическому давлению, направленному перпендикулярно плоскости границы раздела (вдоль оси - c симметрии кристаллов GaS и GaSe). Давление изменялось в интервале от 5 до 500 кг/см². Видно, что с увеличением давления прямая ветвь ВАХ улучшается, но начиная ~ 400 кг/см² происходит ухудшение характеристики.

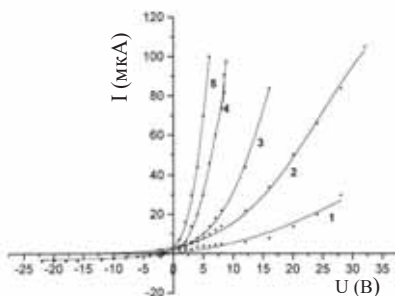


Рис. 1. Вольт-амперные характеристики гетероперехода GaS/GaSe при различных приложенных внешних давлениях P (кг/см²): 1-5, 2-50; 3-100; 4-500; 5-300.

Исследование спектров оптического поглощения GaS и GaSe, подвергнутых влиянию одноосного сжатия давлением до $P=75$ кПа, свидетельствует об отсутствии изменений в энергетическом спектре этих полупроводников. Уменьшение ширины запрещенной зоны под действием давления становится заметным лишь при значениях давления $P>75$ кПа. Это обстоятельство дает основания связать изменения вольт-амперной характеристики гетероперехода GaS/GaSe в исследуемом диапазоне давлений с изменением, происходящими на границе раздела.

На рисунке 2,а и б, представлены спектры излучения гетероструктуры GaS-GaSe при возбуждении второй гармоникой Nd:YAG-лазера ($\hbar\omega = 2.34$ эВ). Как видно из рисунка, в спектре люминесценции гетероструктуры GaS-GaSe наблюдаются четыре максимума с длинами

волн 492 нм, 507 нм, 613 нм и 622 нм.

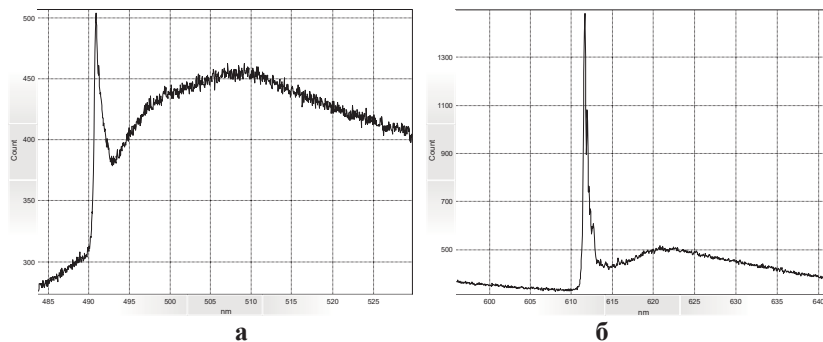


Рис. 2. а-спектр излучения GaS, б-спектр излучения GaSe.

По-нашему мнению узкая линия излучения $\lambda = 492$ нм с полушириной ~ 10 А⁰ на рис 2,а обусловлена люминесценцией в GaS при двухфотонном возбуждении, так как энергия кванта второй гармоники лазерного света ($\hbar\omega = 2,34$ эВ), меньше ширины запрещенной зоны GaS ($E_g = 2.53$ эВ), т.е. $\hbar\omega < E_g$, а линии излучения $\lambda = 613$ нм с полушириной несколько ангстрем на рис.2,б связаны с излучательной рекомбинацией GaSe при однофотонном возбуждении, так как в этом случае энергия кванта второй гармоники больше ширины запрещенной зоны GaSe ($E_g = 2.02$ эВ), т.е. $\hbar\omega > E_g$. Следует отметить, что интенсивная линия излучения с длиной волны 492 нм ($\hbar\omega = 2.53$ эВ) связана с непрямыми переходами на краю фундаментального поглощения GaS [9,10]. Широкая полоса излучения с максимумом 507 нм ($\hbar\omega = 2.45$ эВ) обусловлена глубокими примесными центрами. Что касается линий излучения с максимумами 613 нм ($\hbar\omega = 2.02$ эВ) и 622 нм ($\hbar\omega = 1.99$ эВ), как было указано выше, они принадлежат GaSe и связаны зона-зонными и примесными переходами, соответственно [11].

На рисунке 3,а представлена кривая релаксация фототока в гетероструктуре GaS-GaSe. Как видно из рисунка кривая релаксации состоит из двух компонент, быстрая, с временем релаксации 2×10^{-7} сек и медленная $\sim 2 \times 10^{-6}$ сек. Так как лазерный свет падает на гетероструктуру GaS-GaSe со стороны GaS (широкозонное окно), то можно предположить, что быстрый канал релаксации связан с GaS, а медленный канал релаксации обусловлен рекомбинацией неравновесных носителей, генерированных в GaSe. По-нашему мнению уширение кривой релаксации фототока, связано с тем, что носители тока для достижения контакта в GaSe должны преодолеть потенциальный барьер, созданный структурными неоднородностями вещества [12].

На рисунке 3,б показана зависимость фототока в гетероструктуре GaS-GaSe от интенсивности лазерного излучения. Как видно из рисунка, люкс-амперная характеристика вначале имеет квадратичную зависимость $I_{ph} = I_{\text{лаз.}}^2$, а при высоких интенсивностях возбуждения наблюдается линейная зависимость. По-нашему мнению квадратичная зависимость обусловлена двухфотонной фотопроводимостью, возникающей в GaS при возбуждении второй гармоникой Nd:YAG-лазера. Известно, что неравновесная фотопроводимость $\Delta\sigma$ определяется формулой:

$$\Delta\sigma = e\mu\tau\beta\alpha I \quad (1)$$

где e -заряд электрона, μ - подвижность электронов, β - квантовый выход, α - коэффициент поглощения света, I - интенсивность лазерного света.

При многофотонном процессе коэффициент поглощения зависит от интенсивности света, $\alpha^n \sim I^{n-1}$, где n -число фотонов, участвовавших при нелинейном поглощении. Поэтому при двухфотонном поглощении $\alpha \sim I$, а двухфотонная фотопроводимость будет квадратично зависеть от интенсивности лазерного света [13]:

$$\Delta\sigma^{(2)} \sim \alpha(I)I \sim I^2 \quad (2)$$

Таким образом, экспериментально наблюдаемая квадратичная зависимость фототока от интенсивности лазерного света может быть удовлетворительно объяснена двухфотонной фотопроводимостью.

Линейная зависимость, наблюдаемой в люкс-амперной характеристике неравновесной фотопроводимости связана с линейной рекомбинацией носителей тока $\Delta\sigma \sim \Delta n \sim I$ [14].

По исследованию неравновесной фотопроводимости можно оценить концентрацию неравновесных носителей, генерированных лазерным светом при двухфотонном возбуждении. Так как в нашем случае фотопроводимость измеряется в режиме постоянного поля ($R \ll \tau_{\text{обр.}}$), то связь между фотопроводимостью $\Delta\sigma$ и переменным напряжением \mathcal{U} выражается формулой:

$$\Delta\sigma = \frac{\mathcal{U}}{VR} \quad (3)$$

где $V=110$ В - внешнее напряжение, приложенное к образцу, $R=2 \cdot 10^3$ Ом - нагрузочное сопротивление. Оценки показывают, что $\Delta\sigma = 4,55 \cdot 10^{-5}$, тогда из формулы:

$$\Delta\sigma = e(\Delta n)\mu \quad (4)$$

можно определить концентрацию Δn неравновесных носителей:

$$\Delta n = \frac{\Delta \sigma}{e\mu} \quad (5)$$

С учетом значения подвижности, которое равно $\mu = 20 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{сек}$, концентрация неравновесных носителей будет равна $\Delta n = 1,42 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$, а количество носителей в единице объема будет равно $\Delta n \approx 1,42 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

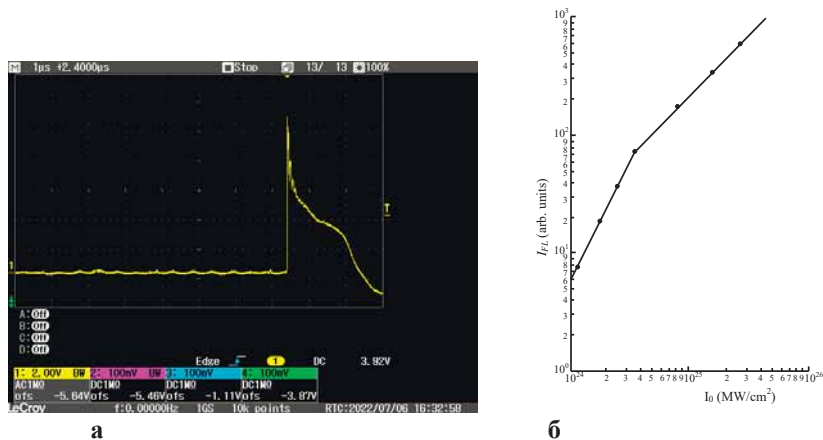


Рис. 3. а-кривая релаксации фототока в гетероструктуре GaS-GaSe, б-зависимость фототока в гетероструктуре GaS-GaSe от интенсивности лазерного излучения.

Таким образом, оценки показывают, что число неравновесных носителей, генерированных в гетеропереходе GaS-GaSe при двухфотонном возбуждении равно $\Delta n \approx 1,42 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

Заключение

Методом посадки на оптический контакт были изготовлены гетеропереходы GaS-GaSe. Под действием второй гармоники Nd:YAG-лазера ($\hbar\omega = 2.34 \text{ эВ}$) экспериментально исследованы спектры и люкс-амперные характеристики люминесценции и кривые релаксации фототока гетеропереходов GaS/GaSe. Показано, что обнаруженные в спектрах люминесценции линии излучения с максимумами 492 нм, 507 нм, 613 нм и 622 нм могут быть обусловлены зона-зонными и примесными переходами. Кривые релаксации состоят из двух компонент, быстрой со временем релаксации 2×10^{-7} сек и медленной $\sim 2 \times 10^{-6}$ сек., которые характеризуются наличием быстрого канала рекомбинации в GaS и потенциального барьера, созданного структурными неоднородностями. Квадратичная зависимость фотопроводимости от интенсивности лазерного излучения позволяет утверждать наличие двухфотонной фото-

проводимости в исследованных гетеропереходах GaS/GaSe. Оценки показывают, что концентрация неравновесных носителей, генерированных в GaS/GaSe под действием лазерного излучения равна $\Delta n \approx 1,42 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алферов Ж.И. ФТП, - 1998, - т.32, - №1, - с. 3-18.
2. Мухин К.Р., Сустанов А.Ф., Тихонов В.Н. УФН, - 2003, - т. 173, - №5, - с. 553-567.
3. Бакуменко В.Л., Чишко В.Ф. ФТП, - 1977, - т.11, - №10, - с.2000-2002.
4. С.И. Драпак, М.О. Воробец, З.Д. Ковалюк. ФТП, - 2005, - т.39, - №5, - с.633-635.
5. Драпак С.И., Катеринчук В.Н., Ковалюк З.Д., Манассон В.А. Физ. Электроника, - 1988, - №41, - с.92-95.
6. Драпак С.И., Орлецкий В.Б., Ковалюк З.Д. ФТП, - 2004, - т.38, - №5, - с. 566-569.
7. Кязым-заде А.Г., Джафаров В.И., Тагиров В.И. ФТП, - 1979, - т.13, - №10, - с.2237-2239.
8. Кязым-заде А.Г., Салманов В.М., Гусейнов А.Г., Мамедов Р.М. Инверсия типа проводимости тонких пленок *n*-InSe под действием лазерного излучения, ЖТФ, - 2019, - т. 89, - в. 4, - с. 599-602.
9. Guler I., Isik M., Ahmedova F., Guseinov A., Gasanly N. Characteristic features of thermoluminescence in neodymium doped gallium sulfide. Wiley luminescence. В, - 2018, - p.1-5. <https://doi.org/10.1002/bio.3473>.
10. Wu C.C., Ho C.H., Shen W.T., Cheng Z.H., Huang Y.S., Tiang K.K. Optical properties of GaSe_{1-x}S_x series layered semiconductors grown by vertical Bridgman method. Mater. Chem. Phys, 2004, v. 88, p. 313 -317.
11. Кязым-заде А.Г., Агаева А.А., Салманов В.М. Неорганические материалы, - 2008, - т.44, - №4, - с. 1-5.
12. Forney J.J., Maschke K., Mooser E. J.Phys.C: Sol.Stat. Phys.- 1977, - v.10, - p.1887--1893.
13. Абдуллаев Г.Б., Мирзоев Б.Р., Салманов В.М., Рывкин С.М., Ярощевский И.Д. ФТП, - 1970, - 4, 1393-1397.
14. Рывкин С.М. Фотоэлектрические явления в полупроводниках. Изд. Физико-математической литературы. - Москва, - 1963, - 493 с.

LAZER ŞÜALANMASININ TƏSİRİ İLƏ GaS/GaSe HETEROSTRUKTURLARINDA LÜMINESSENSİYA VƏ FOTOKEÇİRİCİLİK

R.M.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Təcrübi olaraq GaS/GaSe heterokeçidində Nd:YAG lazerinin impulsunun ikifotonlu həyəcanlandırmasında lüminessensiyanın spektrləri və lüks-amper xarakteristikaları, fotocərayanın relaksasiya əyrləri tədqiq olunmuşdur. Göstərilmişdir ki, GaS/GaSe heterokeçidinin lüminessensiya spektrində müşahidə olunan şüalanmalı rekombinasiya zona-zona və aşqar keçidlərlə bağlıdır. Lazer işığının yaratdığı qeyri-tarazlıqlı yükdaşıyıcıların konsentrasiyaları qiymətləndirilmişdir.

Açar sözlər: GaS/GaSe heterokeçidi, lazer, lüminessensiya, fotokeçiricilik.

LUMINESCENCE AND PHOTOCONDUCTIVITY IN GaS/GaSe HETEROSTRUCTURES UPON LASER EXCITATION

R.M.MAMEDOV

SUMMARY

The spectra and lux-ampere characteristics of the luminescence and the photocurrent relaxation curves of GaS/GaSe heterojunctions under two-photon excitation of a pulsed Nd:YAG laser are experimentally studied. It is shown that the recombination radiation observed in the luminescence spectra of the GaS/GaSe heterojunction is associated with band-band and impurity transitions. The concentration of nonequilibrium carriers generated by laser light is estimated.

Keywords: GaS/GaSe heterojunction, laser, luminescence, photoconductivity.

RESIDENCE TIME DISTRIBUTION APPLICATIONS

Ch.Y.ABBASOVA

ANAS Institute of Radiation Problems

Chichek.1996@gmail.com

Stimulated by an ever increasing demand from the large production plants, many radiotracer techniques have been evolved to provide fast and effective solutions to plant and process problems. These techniques are now in routine service to industry in many developed and developing countries. The number of services for troubleshooting inspections carried out per year is not known precisely, but it is certainly in excess of several thousand, worldwide. The services are available either from private companies, who carry out the majority of applications, or from national nuclear centres.

Keywords: Residence time distribution, radiotracer, radiation detector.

1.Introduction

The applications of radiotracer RTD methods are widespread throughout oil refineries worldwide and this industry is one of the main users, and beneficiaries of the technology [1-9]. Economically, the most important operating unit in a refinery is the Fluidized Catalytic Cracking Unit (FCCU), the function of which is to upgrade the “heavy” components of the oil to gasoline. Technically, this is also the most complex unit, involving as it does the interaction of multiple phases: solid catalyst, vaporized feedstock steam and air. Because of the construction and extreme operating conditions of FCCUs, the only effective way to diagnose their behaviour is through the application of radiotracers. Radioactive tracers have been used to great effect in enhancing oil production in oil fields [10-17]. The main radiotracer technique is the measuring of the “time of travel” between injection and production wells. If a water injection is to be effective in sweeping out oil from the permeable zones it is important to ensure that short-circuiting or channelling, where by much of the residual oil may be bypassed, does not occur. Therefore, it is important to understand how the water from injection well travels to the producer.

The petrochemicals plant lies immediately downstream of the oil

refinery and in many developing countries construction of the two types of facility is proceeding in parallel. Like refineries, petrochemicals plants are generally continuously operating and technically complex [12]. Thus, high economic benefits may be realized by the applications of radiotracer techniques on petrochemicals units. Though radiotracer RTD methods are useful in solving a wide range of problems, the economic benefits become more pronounced the further “upstream” they are applied. This means that diagnosis of the cracking furnace, primary fractionator and gas separation chain is of the highest potential value.

This generic heading covers an enormous range of industries. Minerals processing plants, in one form or another are to be found in practically every country in the world, and in many cases they are major contributors to national economy. Though the range of minerals which are extracted and processed is extremely wide, there are certain processes found throughout the industry: Comminution, classification, flotation, homogenization

The primary justification for focusing attention on this sector is based upon health and environmental considerations, rather than purely on economic benefits per se. The operation of a wastewater treatment lagoon can be deceptively complex. Given the unsatisfactory state of current theoretical approaches, there is a need to be able to assess performance practically; that is, by actually measuring the RTD. Modelling by RTD is a powerful tool, aiding both the design and performance optimization of wastewater treatment systems. Residence time distribution (RTD) and mean residence time (MRT) and are two important parameters of continuously operating industrial process systems, which have a direct bearing on process efficiency and product quality. The measured residence time distribution data are analyzed either to identify the cause of malfunctioning or to characterize the degree of mixing in the system. RTD technique using radiotracers has been routinely used to diagnose imperfect mixing.

2. Experimental work

Radiation detectors were mounted in two rings of four. The top ring of detectors was mounted 30 cm under the top of the packed bed, and the lower ring of detectors was mounted 30 cm above the bottom of the packed bed [20-22]. The detectors were equally spaced every 90 degrees around the circumference of the tower and expected distribution percentage per quadrant was 25 percent for equal distribution. Fig. 1 shows the detector orientation and elevation.

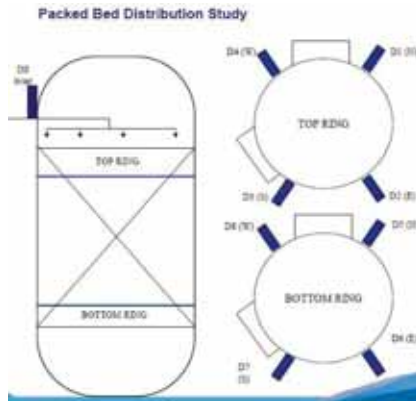


Fig. 1. Detectors location and orientation

Radiotracer test for liquid distribution has solved the problem. Analysis of liquid distribution in top ring of detectors showed preferential flow to the South and East with 38% and 25% of flow, respectively (Fig. 2)

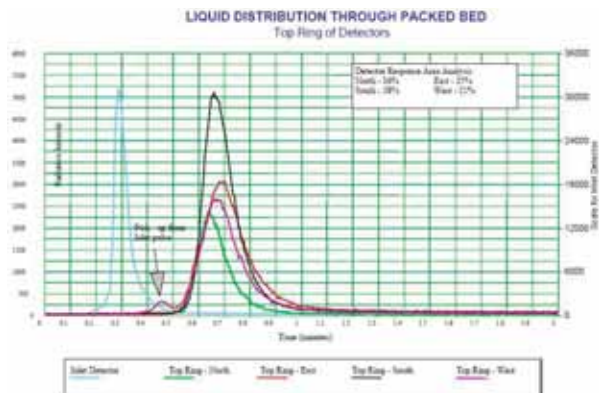


Fig. 2. Radiotracer responses of detectors at top ring

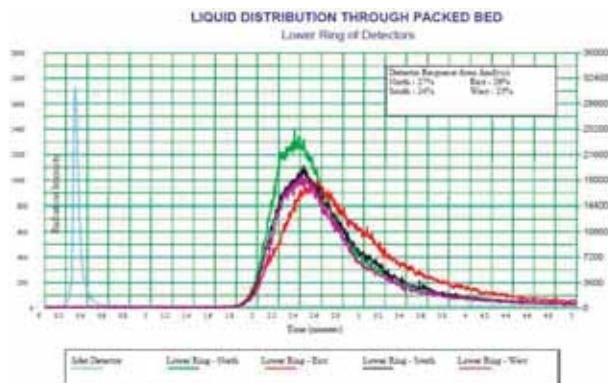


Fig. 3. Radiotracer responses of detectors at lower ring

Radiotracer has troubleshooted the liquid maldistribution inside the tower. Theoretically, the liquid should behave the same in all quadrants, meaning the pulse profiles and timing should be identical for all. The data collected showed some preferential liquid flow to the South quadrant within the tower. Gamma scan technique has limitations in troubleshooting inspection of flow distribution problems of packed bed towers e source of tower malfunction. In this case the combination of complementary techniques such as gamma scan with radiotracer RTD gives a comprehensive picture of what happens in the process and solve the problem. [23].Gamma scan or neutron backscatter techniques are employed to detect gross mechanical problems within different towers. Radiotracer ensures that all possible fluid flow distribution issues are covered as part of the tower performance investigation.

The chemical reactor of the phosphoric acid production has recently experienced a reduction of the quality and quantity of the production. Radiotracer RTD test was requested to diagnose the performance of the reactor. The homogenization of reacting materials (phosphate powder, sulphuric and phosphoric acids) plays an important role in the whole process of production.

The reactor consists of a cylinder with a central unit in which phosphate, acid sulphuric and acid phosphoric enter and a peripheral unit through which the pulp is recirculated into the central unit. The central unit has a turbine mixer, while around the peripheral unit are installed 7 stirrers to assist the recirculation and homogenization process generated by the central unit. The physical volume of the reactor was 900 m³, and the flow rate of the pulp was estimated as 300 m³/h during the test. The phosphate and the acids enter at the central unit of the reactor through separate pipes.

The application of these two radiotracer compounds has a particular importance for tracer groups in developing countries, where there is not nuclear reactor for production of radiotracers and hardly can purchase radioisotope generators from abroad. In almost all developing countries there are nuclear medicine departments where these two radioisotope compounds are commonly used in routine for diagnosis and therapeutical purposes. Having possibility to utilize these two radiotracer compounds, tracer groups in developing countries can apply radiotracer technology for problem solving in many industries and industrial processes.

Radiotracer test

The tracer experiment was carried out under production conditions for the same regime.

Approximately 100 mCi of ¹³¹I (Na¹³¹I) was injected. The radiotracer was obtained from a nuclear medicine department. The radiotracer

was injected at the entrance of the reactor inside the central unit through the tube feeding acids (Fig.4). In order to record the tracer concentration-time curves, a gamma detector was placed at the discharge end of the reactor.

The pulp flow through the reactor is characterizes by the RTD function $E(t)$:

$$E(t) = I(t) / \left[\int_0^\infty I(t) dt \right] \quad (1)$$

where $I(t)$ is the count rate measured at the discharge end of reactor.

The radiotracer detection at the outlet of the reactor was measured using online (continuous) method with a scintillation NaI detector (2''x2'') well collimated. The measuring time was fixed at 10s in order to measure the flow rate of the internal recirculation inside the reactor.

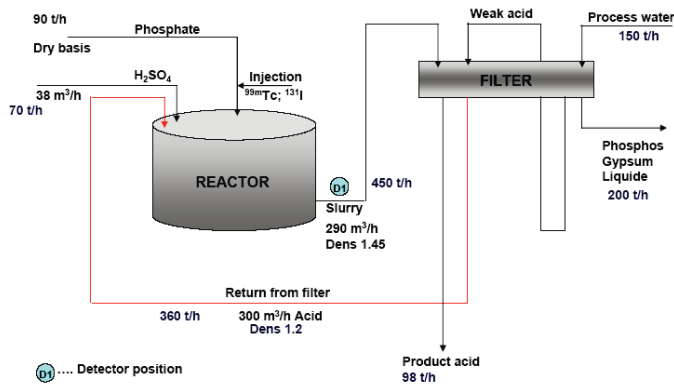


Fig. 4. Position of the radiation detector at the outlet of the reactor.

Na131I and 99mTcO4- can be used as radiotracer for RTD investigating the phosphate chemical reactor. Both they are good tracer of water. They are also used in many case studies for investigation of different chemical reactors. Iodine ions (I-) could be oxidized and transformed in elementary iodine (I) in oxidizing, acid and high temperature mediums. Elementary iodine could also be released as gas in the air if there is any bubbling inert gas in the medium. The chemical reactor for phosphoric acid production has an acid but not oxidizing medium and moreover there is no desorption process because no bubbling. In such circumstances iodine ions remain in the medium. Regarding the iodine ions in radiotracer, their concentration is extremely low, hence even if the medium is oxidizing the oxidation reaction would last very much longer than the residence time of radiotracer inside the reactor. In any case, lack of bubbling makes iodine ions or elementary iodine to remain in the pulp and move with it. Iodine ions

are also hardly absorbed (practically not at all absorbed) by reactor walls (solid surfaces) and mineral substances (calcium phosphorite or sulphate) created during chemical reactions in the reactor. Therefore iodine tracer remains in water phase of the pulp following the pulp hydrodynamic behaviour. As known, water and solid phases of the pulp have the same behaviour in the reactor. Pertechnetate ions (TcO_4^-) could be converted (reduced) into metallic technetium (Tc) in acid, reducing and high temperature mediums. The metallic technetium can be adsorbed by all solid surfaces and could also released in air if there is bubbling throughout the reactor. In extremely low concentration, as it is the case of pertechnetate ions radiotracer, the reducing reaction is very slow. Moreover the reactor medium is not reducing agent and there is no bubbling. Pertechnetate ions could be absorbed and complexed by the solid phase of the pulp (calcium sulphate which precipitates), but in the concrete case of the tracing of the pulp hydrodynamic throughout the reactor this does not affect the RTD of the radiotracer; the solid phase of the pulp has the same RTD as liquid phase.

In short, both sodium iodide and pertechnetate are good tracer of the pulp movement through the phosphate chemical reactor. Between them sodium iodide (as chemical NaI) has the advantage of practically being not at all absorbed by solid surfaces or mineral substances, and iodine radioisotope (I-131) has advantage of having higher gamma energy and detection efficiency outside the reactor and pipe walls.

3. Results and discussion

Mean residence time

Figures 67 shows the experimental data (grouped in three minutes intervals) of the online radiotracer test using I-131 as the tracer. Data are corrected for background and radioactive decay.

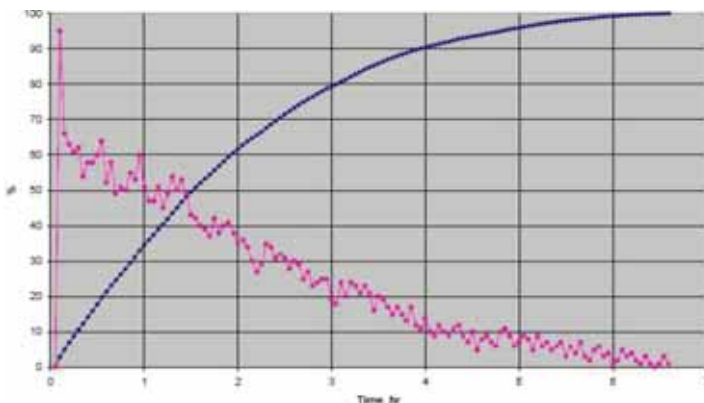


Fig.5. Experimental RTD curve (online) for I-131 tracer test and the percentage of the material leaving the phosphate chemical reactor each time

The curve observed is a decaying sinusoid imposed on an exponential decay and is typical of the response of a well-stirred system to an impulse input. There is not any long tail. Simulation of the experimental RTD curve data with a model showed that the perfect mixing model fits better, thus the reactor was behaving almost like a perfect mixer. The mean residence time was found of $MRT_{exp} = 2$ h. The theoretical mean residence time calculated from physical volume $V = 900$ m³ and flow rate $Q = 300$ m³/h was calculated of $MRT_{th} = 3$ h.

Based on the experimental MRT the active volume of the reactor during the experimental time was calculated of:

$$V_a = Q \times MRT_{exp} = 300 \text{ m}^3/\text{h} \times 2 \text{ h} = 600 \text{ m}^3$$

The non-active volume is consequently estimated of nearly 300 m³. This means that nearly 1/3 of the reactor volume is inactive to the process. Based of the regular form of the RTD curve (without any long tail) it can be stated that the inactive volume in this case is very probably a dead volume or a blocked volume by the solidified material (slag). The perfect mixing model indicates that parts of the pulp are staying inside the reactor from few seconds till nearly 6 hours. This is shown from the cumulative RTD function $F(t) = \sum E(t) \Delta t$ (Fig. 68). The cumulative curve can be useful when analyzing the behaviour of the reactor. The distribution of the contact times results relatively large: there are raw materials leaving the reactor very early without undertaking the chemical reaction (reducing the quality of production), as well as there is pulp remaining in the reactor much longer that needed, spending energy and reducing the yield. Fig. 67 shows that 20% of the material leaves the reactor in nearly 0.5 h; 30 % of the material goes out the reactor in less than 1 h, 60% of the material exits in less than 2 h; 80% goes in around 3 h and 90% needs only 4 h to go out.

Recycles in principle should be indicated in the experimental RTD curves by peaks accepting the assumption that every recycle gives a maximum of the record in the outlet of the reactor. A recycle is counted from the moment the pulp enters the central unit, moving throughout the central unit vortex, leaving it in overflow, and circulating the peripheral unit in unique sense until arriving again to the central unit from its bottom part. In front of this turning point is located the output pipe. The recycled pulp is splitting in two parts, one part leaving the reactor and the other part continuing the next recycle.

4. Conclusion

The reactor realized a perfect mixing of the pulp in nearly 2/3 of its physical volume. The mean residence time of nearly 2 h indicates that nearly 1/3 of the reactor volume is not active and probably is blocked by solidified material. This conclusion is valid for the reactor working

conditions of the date of the experiment. The nine month of continuous working might have an influence in the reduction of the active (productive) volume of the reactor. The pulp inside the reactor is well homogenized; the flow rate of internal circulation is nearly 12 000 m³/h and the coefficient of recirculation nearly 40. This coefficient is quite enough to ensure the homogenization of the pulp within the active volume of the reactor.

BIBLIOGRAPHY

1. Afnor (1983) Mesure de débit des fluides - Conduites fermées, Recueil des Normes Françaises NF X 10-131, 7
2. Berne Ph., Blet V. (1998) Assessment of the systemic approach using radioactive tracers and CFD, Proceedings of the 6th International conference on air distribution in rooms, Stockholm.
3. Berne Ph., Thereska J. Simulation of a radiotracer experiment by flow and detection-chain modelling: a first step towards better interpretation. Appl. Rad. Isotopes 60 (2004) 855-861
4. Bjørnstad, T., "Selection of tracers for oil and gas reservoir evaluation", Technical Research Report, IFE/KR/E-91/009 (1991) 43 pp.
5. Brochure, Tracerco DiagnosticsTM FCC Study, published by Tracerco, Billingham UK, 1998.
6. Charlton J.S. Radioisotope techniques for problem-solving in industrial process plants. Leonard Hill, Glasgow and London, 1986
7. Chmielewski A.G. et al. Application of radioisotope techniques and radiation technologies developed in Institute of Nuclear Chemistry and Technology, Warsaw, Poland. 4th Conference on Radioisotope application and radiation processing in industry, Leipzig, 19-23 September 1988., Proceedings, Vol. I, p. 143, Leipzig, 1999
8. Chueinta S. Radioisotope applications in industry. Thailand country report. AGM, IAEA/RCA Bangkok, October 2003
9. Danckwerts, P.V., Continuous flow systems, Chem. Eng. Sci. **2** (1953) 1 pp
10. Fries B.A. Training the engineer for radiotracer applications in industry. In "Radiation engineering in the academic curriculum", Proceedings of a study group meeting organized by the IAEA and held in Haifa, Israel, 26 August to 4 September 1973, Panel Proceedings Series, IAEA, 1975
11. Fries B.A.. Krypton-85. A versatile tracer for industrial process applications. Int. J. Appl. Radiat. Isot. (Oct-Nov 1977). V. 28 (10-11), p. 829-832
12. Gardner, R.P, Ely. JR. Radioisotope Measurement Applications in Engineering, Reinhold Publishing Corporation, New York (1967)
13. Hills A. Radioisotope applications for troubleshooting and optimizing industrial processes. Brochure, South Africa, 1999
14. International Atomic Energy Agency, Guidebook on Radiotracer in Industry, Technical Reports Series No. 316, IAEA, Vienna (1990)
15. International Atomic Energy Agency, Radiotracer Technology as Applied to Industry, IAEA-TECDOC-1262, IAEA, Vienna, (2001).
16. International Atomic Energy Agency Tracer Applications in Oil Field Investigations, Brochure, IAEA, Vienna (2003)
17. Iqbal Hussain Khan. Radioisotope applications in industry. Pakistan country report. AGM, IAEA/RCA Bangkok, October 2003

18. Jin, J-H. et al. Radiotracers and labelling compounds for applications in industry and environment. Report of the CM, Warsaw, Poland, 16-19 June 2004
19. Pant, H.J., Kundu, A., Nigam, K.D.P., 2001. Radiotracer applications in chemical process industry. Rev. Chem Eng.17,165–252
20. International Atomic Energy Agency, Radiation Protection and the Safety of Radiation Sources, Safety Series No.120, IAEA, Vienna (1996).
21. International Atomic Energy Agency, Legal and Governmental Infrastructure for Nuclear, Radiation, Radioactive Waste and Transport Safety, IAEA Safety Standards Series No. GS- R-1, IAEA, Vienna (2000).
22. International Atomic Energy Agency, Safety Assessment Plans for Authorization and Inspection of Radiation Sources, IAEA-TECDOC-1113, IAEA, Vienna (1999).
23. International Atomic Energy Agency, Method For the Development of Emergency Response Preparedness for Nuclear and Radiological Accidents, IAEA-TECDOC-953, IAEA, Vienna (1997).

YAŞAMA MÜDDƏTİNİN PAYLANMASI PROQRAMLARI

Ç.Y.ABBASOVA

XÜLASƏ

Böyük istehsal müəssisələrinin artan tələbi ilə əlaqədar olaraq, fabrik və proses problemlərinin sürətli və səmərəli həllini təmin etmək üçün müxtəlif radiotraser üsulları hazırlanmışdır. Bu üsullar hazırda bir çox inkişaf etmiş və inkişaf etməkdə olan ölkələrin sənayesində istifadə olunur. Nasazlıqların aradan qaldırılması məqsədilə hər il həyata keçirilən xidmətlərinin dəqiq sayı məlum deyil, lakin bütün dünyada bir neçə mindən çox xidmət var. Xidmətlər ya müraciətlərin əksəriyyətini həyata keçirən özəl şirkətlər, ya da milli nüvə mərkəzləri tərəfindən təmin edilir.

Açar sözlər: yaşayış vaxtının paylanması, radiotraser, radiasiya detektoru

ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ

Ч.Ю.АББАСОВА

РЕЗЮМЕ

В связи с постоянно растущим спросом со стороны крупных производственных предприятий было разработано множество радиоиндикаторных методов для обеспечения быстрых и эффективных решений заводских и технологических проблем. Эти методы в настоящее время используются в промышленности во многих развитых и развивающихся странах. Количество сервисов по устранению неполадок, проводимых ежегодно, точно неизвестно, но во всем мире их, безусловно, больше нескольких тысяч. Услуги предоставляются либо частными компаниями, которые выполняют большинство приложений, либо национальными ядерными центрами.

Ключевые слова: распределение времени пребывания, радиоиндикатор, детектор излучения.

MÜNDƏRİCAT**RİYAZİYYAT****Əhmədova J.B., Mənsimov K.B.**

Bir dəyişən stukturlu optimal idarəetmə məsələsi haqqında 5

Mustafayeva Y.Y., Əliyev N.A.

Üçölçülü kompozit tənliyin fərdholmluğunun yeni üsul ilə araşdırılması 17

Mənsimov K.B., Rzayeva V.G.

Dəyişən stukturlu paylanmış parametrlı bir optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər..... 33

MEXANİKA**Məmməd zadə A.M., Məlikov H.X., Əliyev E.N.,****Mustafayeva R.E., Məlikov T.H.**

Neftin istehsalının maksimum artırılması üçün laya emal edilmiş suyun maqnit sahəsinin gərginliyinin hesablanması..... 49

İNFORMATİKA**Həsənova L.M.**

Azərbaycan dilindəki mətnlərin müəlliflərinin tanınması üçün N-qram metodu..... 54

Rəhimova G.A.

Riyazi ekologiya modelləri..... 60

İmanova N.A.

Modul tədris texnologiyasının tətbiqi zamanı təlim-tədris mühitlərinin nizamlanması 74

FİZİKA**İsmayılov T.H., Zeynalova S.İ.**Kvantlayıcı maqnit sahəsində $Hg_{1-x}Cd_xTe$ -da elektron Raman səpilməsi 81**Məmmədov R.M.**Lazer həyəcanı zamanı $GaSe/InSe$ heterostrukturlarında lüminessensiya və fotokeçiricilik 87**Daşdəmirov A.O., Rzayev R.F.**Nano ölçülü Y_2O_3 kristallarının elektrik xassələrinə neytron şüasının təsiri 95

Hüseynov N.Ə.

Həqiqi identifikasiyası olmayan lepton fonunun Matrix
Metodu ilə qiymətləndirilməsi..... 101

Məmmədov R.M.

Lazer şüalanmasının təsiri ilə GaS/GaSe heterostrukturlarında
lüminessensiya və fotokeçiricilik 109

Abbasova Ç.Y.

Yaşama müddətinin paylanması proqramları 118

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Ахмедова Ж.Б., Мансимов К.Б.
 Об одной задаче оптимального управления с переменной структурой..... 5

Мустафаева Е.Ю., Алиев Н.А.
 Исследование фредгольмовости трехмерного составного уравнения третьего порядка новым методом 17

Мансимов К.Б., Рзаева В.Г.
 Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления с переменной структурой и распределенными параметрами 33

МЕХАНИКА

Мамедзаде А.М., Маликов Х.Х., Алиев Э.Н., Мустафаева Р.Э., Маликов Т.Х.
 Расчет напряженности магнитного поля обработки закачиваемой воды в пласт для получения максимальной добычи нефти..... 49

ИНФОРМАТИКА

Гасанова Л.М.
 N-граммный метод распознавания текстов на азербайджанском языке 54

Рагимова Г.А.
 Математические экологические модели 60

Иманова Н.А.
 Корректирование (регулирование) учебной среды во время применения модульной технологии обучения..... 74

ФИЗИКА

Исмаилов Т.Г., Зейналова С.И.
 Межзонное электронное раман рассеяние в Hg1-xCdxTe в квантующем магнитном поле 81

Мамедов Р.М.	
Люминесценция и фотопроводимость в гетероструктурах GaSe/InSe при лазерном возбуждении.....	87
Дашдемиров А.О., Рзаев Р.Ф.	
Влияние пучка нейтронов на электрические свойства наноразмерных кристаллов Y_2O_3	95
Гусейнов Н.А.	
Вычисление ошибочно идентифицированных легких лептонов матричным методом.....	101
Мамедов Р.М.	
Люминесценция и фотопроводимость в гетероструктурах GaS/GaSe при лазерном возбуждении	109
Аббасова Ч.Ю.	
Приложения для распределения времени пребывания.....	118

CONTENTS

MATHEMATICS

- Ahmadova Zh.B., Mansimov K.B.**
On one optimal control problem with a variable structure 5
- Mustafayeva Y.Y., Aliyev N.A.**
Investigation of fredholm property of a third order three-dimensional composite equation by new method 17
- Mansimov K.B., Rzayeva V.G.**
Necessary conditions for the optimality of the first and second orders in the optimal control problem with variable structure and distributed parameters 33

MECHANICS

- Mamed-zade A.M., Malikov H.Kh., Aliyev E.N., Mustafayeva R.E., Malikov T.H.**
Calculation of the strength of the magnetic field of treatment of the pumped water into the formation to obtain the maximum oil production 49

INFORMATICS

- Hasanova L.M.**
N-gram method for recognition of texts in azerbaijani language 54
- Rahimova G.A.**
Mathematical ecological models 60
- Imanova N.A.**
Training - regulation of learning environment during the application of modular teaching technology 74

PHYSICS

- Ismayilov T.H., Zeynalova S.I.**
Interband electron raman scattering in $Hg_{1-x}Cd_xTe$ in quantized magnetic field 81
- Mamedov R.M.**
Luminescence and photoconductivity in GaSe/InSe heterostructures upon laser excitation 87

Dashdemirov A.O., Rzayev R.F.	
Effect of neutron beam on electrical properties of nanosized Y_2O_3 crystals	95
Huseynov N.A.	
Estimation of misidentified of light leptons using Matrix Method	101
Mamedov R.M.	
Luminescence and photoconductivity in GaS/GaSe heterostructures upon laser excitation.....	109
Abbasova Ch.Y.	
Residence time distribution applications	118